Temas de “Lógica informática” (2010–11)

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 7 de Febrero de 2010

Índice general

1. Sintaxis y semántica de la lógica proposicional **5**
1.1. Introducción 5
1.1.1. Panorama de la lógica 5
1.1.2. Ejemplos de argumentos y formalizaciones 6
1.2. Sintaxis de la lógica proposicional 6
1.2.1. El lenguaje de la lógica proposicional 6
1.2.2. Recursión e inducción sobre fórmulas 7
1.2.3. Árboles de análisis (o de formación) 8
1.2.4. Eliminación de paréntesis 8
1.2.5. Subfórmulas 9
1.3. Semántica proposicional 9
1.3.1. Valores y funciones de verdad 9
1.3.2. Interpretaciones 10
1.3.3. Modelos, satisfacibilidad y validez 11
1.3.4. Algoritmos para satisfacibilidad y validez 12
1.3.5. Selección de tautologías 14
1.3.6. Equivalencia lógica 14
1.3.7. Modelos de conjuntos de fórmulas 15
1.3.8. Consistencia y consecuencia lógica 15
1.3.9. Argumentaciones y problemas lógicos 17

2. Deducción natural proposicional **19**
2.1. Reglas de deducción natural 19
2.1.1. Reglas de la conjunción 19
2.1.2. Reglas de la doble negación 19
2.1.3. Regla de eliminación del condicional 20
2.1.4. Regla derivada de modus tollens (MT) 20
2.1.5. Regla de introducción del condicional 21
2.1.6. Reglas de la disyunción 22
2.1.7. Regla de copia 23
2.1.8. Reglas de la negación 23

2.1.9. Reglas del bicondicional 25
2.2. Reglas derivadas 25
2.2.1. Regla del modus tollens 25
2.2.2. Regla de introducción de doble negación 26
2.2.3. Regla de reducción al absurdo 26
2.2.4. Ley del tercio excluido 26
2.3. Resumen de reglas de deducción natural 28

3. Tableros semánticos 31
3.1. Búsqueda de modelos 31
3.2. Notación uniforme 33
3.3. Procedimiento de completación de tableros 34
3.4. Modelos por tableros semánticos 35
3.5. Consistencia mediante tableros 36
3.6. Teorema por tableros 36
3.7. Deducción por tableros 36
3.8. Tableros en notación reducida 37

4. Formas normales 39
4.1. Forma normal conjuntiva 39
4.1.1. Definición de forma normal conjuntiva 39
4.1.2. Algoritmo de cálculo de forma normal conjuntiva 39
4.1.3. Decisión de validez mediante FNC 41
4.2. Forma normal disyuntiva 42
4.2.1. Definición de forma normal disyuntiva 42
4.2.2. Algoritmo de cálculo de forma normal disyuntiva 42
4.2.3. Decisión de satisfacibilidad mediante FND 43
4.3. Cálculo de formas normales mediante tableros semánticos 44
4.3.1. Forma normal disyuntiva por tableros 44
4.3.2. Forma normal conjuntiva por tableros 44

5. Resolución proposicional 47
5.1. Lógica de cláusulas 47
5.1.1. Sintaxis de la lógica clausal 47
5.1.2. Semántica de la lógica clausal 47
5.1.3. Equivalencias entre cláusulas y fórmulas 48
5.1.4. Modelos, consistencia y consecuencia entre cláusulas 49
5.1.5. Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas 49
5.2. Demostraciones por resolución 50
5.2.1. Regla de resolución proposicional 50
5.2.2. Demostraciones por resolución 50

5.3. Algoritmos de resolución 53
5.3.1. Algoritmo de resolución por saturación 53
5.3.2. Algoritmo de saturación con simplificación 54
5.4. Refinamientos de resolución 55
5.4.1. Resolución positiva 55
5.4.2. Resolución negativa 56
5.4.3. Resolución unitaria 57
5.4.4. Resolución por entradas 57
5.4.5. Resolución lineal 58
5.5. Argumentación por resolución 58
5.5.1. Formalización de argumentación por resolución 58
5.5.2. Decisión de argumentación por resolución 59

6. Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden 61
6.1. Representación del conocimiento en lógica de primer orden 61
6.1.1. Representación de conocimiento geográfico 61
6.1.2. Representación del mundo de los bloques 62
6.1.3. Representación de conocimiento astronómico 63
6.2. Sintaxis de la lógica de primer orden 64
6.2.1. Lenguaje de primer orden 64
6.2.2. Términos y fórmulas de primer orden 66
6.2.3. Subfórmulas 67
6.2.4. Variables libres y ligadas 69
6.3. Semántica de la lógica de primer orden 70
6.3.1. Estructuras, asignaciones e interpretaciones 70
6.3.2. Evaluación de términos y fórmulas 72
6.3.3. Modelo, satisfacibilidad y validez de fórmulas 75
6.3.4. Modelo y consistencia de conjuntos de fórmulas 77
6.3.5. Consecuencia lógica 78
6.3.6. Equivalencia lógica 79

7. Deducción natural en lógica de primer orden 81
7.1. Sustituciones 81
7.1.1. Definición de sustitución 81
7.1.2. Aplicación de sustituciones a términos 81
7.1.3. Aplicación de sustituciones a fórmulas 82
7.1.4. Sustituciones libres 83
7.2. Reglas de deducción natural de cuantificadores 83
7.2.1. Reglas del cuantificador universal 83
7.2.2. Reglas del cuantificador existencial 84
7.2.3. Demostración de equivalencias por deducción natural 85

7.3. Reglas de la igualdad 90
7.3.1. Regla de eliminación de la igualdad 90
7.3.2. Regla de introducción de la igualdad 90

8. Tableros semánticos 93
8.1. Fórmulas gamma y delta 93
8.2. Consecuencia mediante tableros semánticos 93

9. Formas normales de Skolem y cláusulas 97
9.1. Formas normales 97
9.1.1. Forma rectificada 97
9.1.2. Forma normal prenexa 97
9.1.3. Forma normal prenexa conjuntiva 99
9.1.4. Forma de Skolem 100
9.2. Cláusulas de primer orden 102
9.2.1. Sintaxis de la lógica clausal de primer orden 102
9.2.2. Semántica de la lógica clausal de primer orden 102
9.2.3. Forma clausal de una fórmula 103
9.2.4. Forma clausal de un conjunto de fórmulas 104
9.2.5. Redución de consecuencia e inconsistencia de cláusulas 105

10. Modelos de Herbrand 107
10.1. Modelos de Herbrand 107
10.1.1. Reducción de la LPO básica a proposicional 107
10.1.2. Universo de Herbrand 108
10.1.3. Base de Herbrand 110
10.1.4. Interpretaciones de Herbrand 110
10.1.5. Modelos de Herbrand 110
10.2. Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia 111
10.2.1. Interpretación de Herbrand de una interpretación 111
10.2.2. Consistencia mediante modelos de Herbrand 112
10.2.3. Extensiones de Herbrand 113
10.2.4. Teorema de Herbrand 114
10.2.5. Semidecisión mediante el teorema de Herbrand 114

11. Resolución en lógica de primer orden 117
11.1. Introducción 117
11.1.1. Ejemplos de consecuencia mediante resolución 117
11.2. Unificación 118
11.2.1. Unificadores 118
11.2.2. Composición de sustituciones 118

11.2.3. Comparación de sustituciones 119
11.2.4. Unificador de máxima generalidad 119
11.2.5. Algoritmo de unificación 120
11.3. Resolución de primer orden 122
11.3.1. Separación de variables 122
11.3.2. Resolvente binaria 123
11.3.3. Factorización 123
11.3.4. Demostraciones por resolución 124
11.3.5. Adecuación y completitud de la resolución 126
11.3.6. Decisión de no–consecuencia por resolución 127

Bibliografía **128**

Tema 1

Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

Contenido

1.1. Introducción **5**
1.1.1. Panorama de la lógica 5
1.1.2. Ejemplos de argumentos y formalizaciones 6
1.2. Sintaxis de la lógica proposicional **6**
1.2.1. El lenguaje de la lógica proposicional 6
1.2.2. Recursión e inducción sobre fórmulas 7
1.2.3. Árboles de análisis (o de formación) 8
1.2.4. Eliminación de paréntesis 8
1.2.5. Subfórmulas 9
1.3. Semántica proposicional **9**
1.3.1. Valores y funciones de verdad 9
1.3.2. Interpretaciones 10
1.3.3. Modelos, satisfacibilidad y validez 11
1.3.4. Algoritmos para satisfacibilidad y validez 12
1.3.5. Selección de tautologías 14
1.3.6. Equivalencia lógica 14
1.3.7. Modelos de conjuntos de fórmulas 15
1.3.8. Consistencia y consecuencia lógica 15
1.3.9. Argumentaciones y problemas lógicos 17

1.1. Introducción

1.1.1. Panorama de la lógica

- Objetivos de la lógica:
  - La formalización del lenguaje natural.
  - Los métodos de razonamiento.
- Sistemas lógicos:
  - Lógica proposicional.
  - Lógica de primer orden.
  - Lógicas de orden superior.
  - Lógicas modales.
  - Lógicas descriptivas.
- Aplicaciones de la lógica en computación:
  - Programación lógica.
  - Verificación y síntesis automática de programas.
  - Representación del conocimiento y razonamiento.
  - Modelización y razonamiento sobre sistemas.
- Lógica informática = Representación del conocimiento +
Razonamiento

1.1.2. Ejemplos de argumentos y formalizaciones

- Ejemplos de argumentos:
  - Ejemplo 1: Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. *Por tanto,* habían taxis en la estación.
  - Ejemplo 2: Si hay corriente y la lámpara no está fundida, entonces está encendida. La lámpara no está encendida. Hay corriente. *Por tanto,* la lámpara está fundida.
- Formalización:

- Simbolización:

Simb.	Ejemplo 1	Ejemplo 2
p	el tren llega a las 7	hay corriente
q	hay taxis en la estación	la lámpara está fundida
r	Juan llega tarde a la reunión	la lámpara está encendida

- Si p y no q, entonces r. No r. p. Por tanto, q.
- $p \wedge \neg q \rightarrow r,\ \neg r,\ p \models q$.

1.2. Sintaxis de la lógica proposicional

1.2.1. El lenguaje de la lógica proposicional

El lenguaje de la lógica proposicional

- Alfabeto proposicional:
  - variables proposicionales: $p_0, p_1, \dots; p, q, r$.
  - conectivas lógicas:
    - monaria: $\neg$ (negación),
    - binarias: $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\rightarrow$ (condicional), $\leftrightarrow$ (bicondicional).
  - símbolos auxiliares: "(" y ")".
- Fórmulas proposicionales:
  - Definición:
    - Las variables proposicionales son fórmulas (fórmulas atómicas).
    - Si F y G son fórmulas, entonces también lo son $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$
  - Ejemplos:
    - Fórmulas: p, $(p \vee \neg q)$, $\neg(p \vee p)$, $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$
    - No fórmulas: (p), $p \vee \neg q$, $(p \vee \wedge q)$

Fórmulas proposicionales (BNF)

- Notaciones:
  - $p, q, r, \dots$ representarán variables proposicionales.
  - $F, G, H, \dots$ representarán fórmulas.

- VP representa el conjunto de los variables proposicionales.
- Prop representa el conjunto de las fórmulas.
- $*$ representa una conectiva binaria.

- Forma de Backus Naur (BNF) de las fórmula proposicionales:
  - $F ::= p \mid \neg G \mid (F \wedge G) \mid (F \vee G) \mid (F \rightarrow G) \mid (F \leftrightarrow G)$.

1.2.2. Recursión e inducción sobre fórmulas

Definiciones por recursión sobre fórmulas

- Número de paréntesis de una fórmula:
  - Def: El número de paréntesis de una fórmula F se define recursivamente por:

$$\mathrm{np}(F) = \begin{cases} 0, & \text{si } F \text{ es atómica;} \\ \mathrm{np}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ 2 + \mathrm{np}(G) + \mathrm{np}(H), & \text{si } F \text{ es } (G * H) \end{cases}$$

  - Ejemplos:
    - $\mathrm{np}(p) = 0$
    - $\mathrm{np}(q) = 0$
    - $\mathrm{np}(\neg q) = 0$
    - $\mathrm{np}((\neg q \vee p)) = 2$
    - $\mathrm{np}((p \rightarrow (\neg q \vee p))) = 4$

Demostración por inducción sobre fórmulas

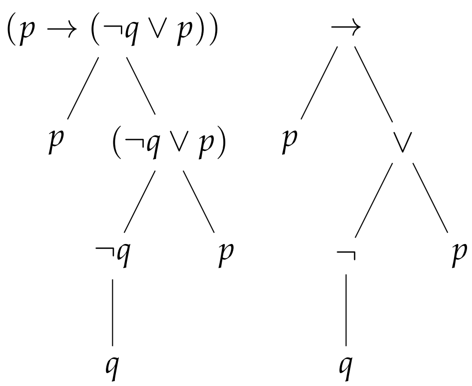
- Principio de inducción sobre fórmulas: Sea $\mathcal{P}$ una propiedad sobre las fórmulas que verifica las siguientes condiciones:
  - Todas las fórmulas atómicas tienen la propiedad $\mathcal{P}$.
  - Si F y G tienen la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$, tienen la propiedad $\mathcal{P}$.

  Entonces todas las fórmulas proposicionales tienen la propiedad $\mathcal{P}$.

- Propiedad: Todas las fórmulas proposicionales tienen un número par de paréntesis.
  - Demostración por inducción sobre las fórmulas.

- Base: F atómica $\Longrightarrow \text{np}(F) = 0$ es par.
- Paso: Supongamos que $\text{np}(F)$ y $\text{np}(G)$ es par (hipótesis de inducción). Entonces,
  $\text{np}(\neg F) = \text{np}(F)$ es par y
  $\text{np}((F * G)) = 2 + \text{np}(F) + \text{np}(G)$ es par,
  para cualquier conectiva binaria $\star$.

1.2.3. Árboles de análisis (o de formación)



1.2.4. Eliminación de paréntesis

Criterios de reducción de paréntesis

- Pueden eliminarse los paréntesis externos.
  $F \land G$ es una abreviatura de $(F \land G)$.

- Precedencia de asociación de conectivas: $\neg, \land, \lor, \to, \leftrightarrow$.
  $F \land G \to \neg F \lor G$ es una abreviatura de $((F \land G) \to (\neg F \lor G))$.

- Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha.
  $F \lor G \lor H$ abrevia $(F \lor (G \lor H))$
  $F \land G \land H \to \neg F \lor G$ abrevia $((F \land (G \land H)) \to (\neg F \lor G))$

1.2.5. Subfórmulas

Subfórmulas

- Def: El conjunto $\text{Subf}(F)$ de las subfórmulas de una fórmula F se define recursivamente por:

$$\text{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es atómica;} \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G) \cup \text{Subf}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H \end{cases}$$

- Ejemplos:
  - $\text{Subf}(p) = \{p\}$
  - $\text{Subf}(q) = \{q\}$
  - $\text{Subf}(\neg q) = \{\neg q, q\}$
  - $\text{Subf}(\neg q \vee p) = \{\neg q \vee p, \neg q, q, p\}$
  - $\text{Subf}(p \to \neg q \vee p) = \{p \to \neg q \vee p, p, \neg q \vee p, \neg q, q\}$

1.3. Semántica proposicional

1.3.1. Valores y funciones de verdad

- Valores de verdad ($\mathbb{B}$): 1: verdadero y 0: falso.
- Funciones de verdad:
  - $H_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$ t.q. $H_\neg(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0; \\ 0, & \text{si } i = 1. \end{cases}$
  - $H_\wedge : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\wedge(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - $H_\vee : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\vee(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - $H_\to : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\to(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 1, j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - $H_\leftrightarrow : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\leftrightarrow(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

1.3.2. Interpretaciones

- Funciones de verdad mediante tablas de verdad:

i	$\neg i$
1	0
0	1

i	j	$i \wedge j$	$i \vee j$	$i \to j$	$i \leftrightarrow j$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

- Interpretación:
  - Def.: Una interpretación es una aplicación $I : \mathsf{VP} \to \mathbb{B}$.
  - Prop: Para cada interpretación I existe una única aplicación $I' : \mathsf{Prop} \to \mathbb{B}$ tal que:

$$I'(F) = \begin{cases} I(F), & \text{si } F \text{ es atómica;} \\ H_\neg(I'(G)), & \text{si } F = \neg G; \\ H_*(I'(G), I'(H)), & \text{si } F = G * H \end{cases}$$

    Se dice que $I'(F)$ es el valor de verdad de F respecto de I.

- Ejemplo: Sea $F = (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$
  - valor de F en una interpretación I_1 tal que $I_1(p) = I_1(r) = 1, I_1(q) = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} (p & \vee & q) & \wedge & (\neg q & \vee & r) \\ (1 & \vee & 0) & \wedge & (\neg 0 & \vee & 1) \\ & 1 & & \wedge & (1 & \vee & 1) \\ & 1 & & \wedge & & 1 & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

  - valor de F en una interpretación I_2 tal que $I_2(r) = 1, I_2(p) = I_2(q) = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} (p & \vee & q) & \wedge & (\neg q & \vee & r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 1 \end{array}$$

- Prop.: Sea F una fórmula y I_1, I_2 dos interpretaciones. Si $I_1(p) = I_2(p)$ para todos las variables proposicionales de F, entonces $I_1'(F) = I_2'(F)$.

- Notación: Se escribe $I(F)$ en lugar de $I'(F)$.

1.3.3. Modelos, satisfacibilidad y validez

Modelos y satisfacibilidad

- Modelo de una fórmula
  - Def.: I es modelo de F si $I(F) = 1$.

- Notación: $I \models F$.
- Ejemplo (continuación del anterior):
  – si $I_1(p) = I_1(r) = 1, I_1(q) = 0$, entonces $I_1 \models (p \lor q) \land (\neg q \lor r)$
  – si $I_2(r) = 1, I_2(p) = I_2(q) = 0$, entonces $I_2 \not\models (p \lor q) \land (\neg q \lor r)$.

- Fórmulas satisfacibles e insatisfacibles
  - Def.: F es satisfacible si F tiene algún modelo.
  - Ejemplo: $(p \to q) \land (q \to r)$ es satisfacible
    $I(p) = I(q) = I(r) = 0$.
  - Def.: F es insatisfacible si F no tiene ningún modelo.
  - Ejemplo: $p \land \neg p$ es insatisfacible

p	$\neg p$	$p \land \neg p$
1	0	0
0	1	0

Tautologías y contradicciones

- Def.: F es una tautología (o válida) si toda interpretación es modelo de F. Se representa por $\models F$.
- Def.: F es una contradicción si ninguna interpretación es modelo de F.
- Def.: F es contingente si no es tautología ni contradicción.
- Ejemplos:
  1. $(p \to q) \lor (q \to p)$ es una tautología.
  2. $(p \to q) \land \neg(p \to q)$ es una contradicción.
  3. $p \to q$ es contingente.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \lor (q \to p)$	$\neg(p \to q)$	$(p \to q) \land \neg(p \to q)$
1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Clasificaciones de fórmulas

Todas las fórmulas		
Tautologías	Contigentes	Contradicciones
Verdadera en todas las interpretaciones (ej. $p \lor \neg p$)	Verdadera en algunas interpretaciones y falsa en otras (ej. $p \to q$)	Falsa en todas las interpretaciones (ej. $p \land \neg p$)
Safisfacibles		Insatisfacibles
Todas las fórmulas		

Satisfacibilidad y validez

- Los problemas SAT y TAUT:
  - Problema SAT: Dada F determinar si es satisfacible.
  - Problema TAUT: Dada F determinar si es una tautología.
- Relaciones entre satisfacibilidad y tautologicidad:
  - F es tautología $\iff$ $\neg F$ es insatisfacible.
  - F es tautología $\implies$ F es satisfacible.
  - F es satisfacible $\not\Longrightarrow$ $\neg F$ es insatisfacible.

    $p \to q$ es satisfacible.

    $$I(p) = I(q) = 1$$

    $\neg(p \to q)$ es satisfacible.

    $$I(p) = 1, I(q) = 0.$$

1.3.4. Algoritmos para satisfacibilidad y validez

- Tabla de verdad para $\models (p \to q) \lor (q \to p)$:

p	q	$(p \to q)$	$(q \to p)$	$(p \to q) \lor (q \to p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

- Tabla de verdad simplificada para $\models (p \to q) \lor (q \to p)$:

p	q	$(p$	$\to$	$q)$	$\lor$	$(q$	$\to$	$p)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0

- Método de Quine para $\models (p \to q) \lor (q \to p)$

$(p$	$\to$	$q)$	$\lor$	$(q$	$\to$	$p)$
			0			
	0				0	
				1		0
0		1				
	1					

- Método de Quine para $\models (p \to q) \lor (q \to p)$

$(p$	$\to$	$q)$	$\lor$	$(q$	$\to$	$p)$
0	0	1	0	1	0	0
	$1*$					

- Tablas de verdad para $\not\models (p \leftrightarrow q) \lor (q \leftrightarrow p)$

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$(q \leftrightarrow p)$	$(p \leftrightarrow q) \lor (q \leftrightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

- Método de Quine para $\not\models (p \leftrightarrow q) \lor (q \leftrightarrow p)$

$(p$	$\leftrightarrow$	$q)$	$\lor$	$(q$	$\leftrightarrow$	$p)$
0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1

1.3.5. Selección de tautologías

1.	$F \to F$	(ley de identidad).
2.	$F \lor \neg F$	(ley del tercio excluido).
3.	$\neg(F \land \neg F)$	(principio de no contradicción).
4.	$(\neg F \to F) \to F$	(ley de Clavius).
5.	$\neg F \to (F \to G)$	(ley de Duns Scoto).
6.	$((F \to G) \to F) \to F$	(ley de Peirce).
7.	$(F \to G) \land F \to G$	(modus ponens).
8.	$(F \to G) \land \neg G \to \neg F$	(modus tollens).

1.3.6. Equivalencia lógica

Fórmulas equivalentes

- Def.: F y G son equivalentes si $I(F) = I(G)$ para toda interpretación I. Representación: $F \equiv G$.
- Ejemplos de equivalencias notables:
  1. Idempotencia: $F \lor F \equiv F$; $F \land F \equiv F$.
  2. Conmutatividad: $F \lor G \equiv G \lor F$; $F \land G \equiv G \land F$.
  3. Asociatividad: $F \lor (G \lor H) \equiv (F \lor G) \lor H$;
     $F \land (G \land H) \equiv (F \land G) \land H$
  4. Absorción: $F \land (F \lor G) \equiv F$; $F \lor (F \land G) \equiv F$.
  5. Distributividad: $F \land (G \lor H) \equiv (F \land G) \lor (F \land H)$;
     $F \lor (G \land H) \equiv (F \lor G) \land (F \lor H)$.
  6. Doble negación: $\neg\neg F \equiv F$.
  7. Leyes de De Morgan: $\neg(F \land G) \equiv \neg F \lor \neg G$;
     $\neg(F \lor G) \equiv \neg F \land \neg G$
  8. Leyes de tautologías: Si F es una tautología, $F \land G \equiv G$; $F \lor G \equiv F$.
  9. Leyes de contradicciones: Si F es una contradicción $F \land G \equiv F$; $F \lor G \equiv G$.

Propiedades de la equivalencia lógica

- Relación entre equivalencia y bicondicional:
  - $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
- Propiedades básicas de la equivalencia lógica:

- Reflexiva: $F \equiv F$.
- Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$.
- Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$.

- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:
  - Prop.: Si en la fórmula F se sustituye una de sus subfórmulas G por una fórmula G' lógicamente equivalente a G, entonces la fórmula obtenida, F', es lógicamente equivalente a F.
  - Ejemplo: $$\begin{array}{ll} F & = \neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg\neg r) \\ G & = \neg(p \wedge q) \\ G' & = \neg p \vee \neg q \\ F' & = (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg\neg r) \end{array}$$

1.3.7. Modelos de conjuntos de fórmulas

- Notación:
  - $S, S_1, S_2, \dots$ representarán conjuntos de fórmulas.
- Modelo de un conjunto de fórmulas:
  - Def.: I es modelo de S si para toda $F \in S$ se tiene que $I \models F$.
  - Representación: $I \models S$.
  - Ejemplo: Sea $S = \{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), q \rightarrow r\}$
    La interpretación I_1 tal que $I_1(p) = 1, I_1(q) = 0, I_1(r) = 1$ es modelo de S ($I_1 \models S$).
    $$\begin{array}{cccccccccccc} \{(p & \vee & q) & \wedge & (\neg & q & \vee & r), & & q & \rightarrow & r\} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & 0 & 1 & 1 \end{array}$$
    La interpretación I_2 tal que $I_2(p) = 0, I_2(q) = 1, I_2(r) = 0$ no es modelo de S ($I_2 \not\models S$).
    $$\begin{array}{cccccccccccc} \{(p & \vee & q) & \wedge & (\neg & q & \vee & r), & & q & \rightarrow & r\} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

1.3.8. Consistencia y consecuencia lógica

Conjunto consistente de fórmulas

- Def.: S es consistente si S tiene algún modelo.
- Def.: S es inconsistente si S no tiene ningún modelo.

- Ejemplos:
  - $\{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), p \to r\}$ es consistente (con modelos I_4, I_6, I_8)
  - $\{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), p \to r, \neg r\}$ es inconsistente

	p	q	r	$(p \lor q)$	$(\neg q \lor r)$	$(p \lor q) \land (\neg q \lor r)$	$p \to r$	$\neg r$
I_1	0	0	0	0	1	0	1	1
I_2	0	0	1	0	1	0	1	0
I_3	0	1	0	1	0	0	1	1
I_4	0	1	1	1	1	1	1	0
I_5	1	0	0	1	1	1	0	1
I_6	1	0	1	1	1	1	1	0
I_7	1	1	0	1	0	0	0	1
I_8	1	1	1	1	1	1	1	0

Consecuencia lógica

- Def.: F es consecuencia de S si todos los modelos de S son modelos de F.
- Representación: $S \models F$.
- Ejemplos: $\{p \to q, q \to r\} \models p \to r$ y $\{p\} \not\models p \land q$

	p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$
I_1	0	0	0	1	1	1
I_2	0	0	1	1	1	1
I_3	0	1	0	1	0	1
I_4	0	1	1	1	1	1
I_5	1	0	0	0	1	0
I_6	1	0	1	0	1	1
I_7	1	1	0	1	0	0
I_8	1	1	1	1	1	1

p	q	$p \land q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Propiedades de la consecuencia

- Propiedades básicas de la relación de consecuencia:
  - Reflexividad: $S \models S$.
  - Monotonía: Si $S_1 \models F$ y $S_1 \subseteq S_2$, entonces $S_2 \models F$.
  - Transitividad: Si $S \models F$ y $\{F\} \models G$, entonces $S \models G$.
- Relación entre consecuencia, validez, satisfacibilidad y consistencia:

- Las siguientes condiciones son equivalentes:
  1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$
  2. $\models F_1 \land \cdots \land F_n \to G$
  3. $\neg(F_1 \land \cdots \land F_n \to G)$ es insatisfacible
  4. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente

1.3.9. Argumentaciones y problemas lógicos

Ejemplo de argumentación

- Problema de los animales: Se sabe que

  1. Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.
  2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
  3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
  4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

  Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

- Formalización:

$$
\begin{aligned}
\{ \quad & \text{tiene\_pelos} \lor \text{da\_leche} \to \text{es\_mamífero}, \\
& \text{es\_mamífero} \land (\text{tiene\_pezuñas} \lor \text{rumia}) \to \text{es\_ungulado}, \\
& \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_cuello\_largo} \to \text{es\_jirafa}, \\
& \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_rayas\_negras} \to \text{es\_cebra}, \\
& \text{tiene\_pelos} \land \text{tiene\_pezuñas} \land \text{tiene\_rayas\_negras}\} \\
\models \ & \text{es\_cebra}
\end{aligned}
$$

Problemas lógicos: veraces y mentirosos

- Enunciado: En una isla hay dos tribus, la de los veraces (que siempre dicen la verdad) y la de los mentirosos (que siempre mienten). Un viajero se encuentra con tres isleños A, B y C y cada uno le dice una frase

  1. A dice "B y C son veraces syss C es veraz"
  2. B dice "Si A y C son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso"
  3. C dice "B es mentiroso syss A o B es veraz"

  Determinar a qué tribu pertenecen A, B y C.

- Simbolización: a: "A es veraz", b: "B es veraz", c: "C es veraz".

- Formalización:
  $F_1 = a \leftrightarrow (b \wedge c \leftrightarrow c)$, $F_2 = b \leftrightarrow (a \wedge c \to b \wedge c \wedge \neg a)$ y $F_3 = c \leftrightarrow (\neg b \leftrightarrow a \vee b)$.
- Modelos de $\{F_1, F_2, F_3\}$:
  Si I es modelo de $\{F_1, F_2, F_3\}$, entonces $I(a) = 1, I(b) = 1, I(c) = 0$.
- Conclusión: A y B son veraces y C es mentiroso.

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000)

   Cap. 0 (Introducción), 6 (Sintaxis de la lógica proposicional), 7 (Semántica de la lógica proposicional), 9 (Consecuencia lógica) y 11 (Lógica proposicional y lenguaje natural).

2. M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.).* (Springer, 2001)

   Cap. 1 (Introduction) y 2 (Propositional calculus: formulas, models, tableaux).

3. J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002)

   Cap. 2 (El lenguaje de la lógica proposicional) y 3 (Semántica formal. Consecuencia lógica).

4. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000)

   Cap. 1 (Propositional logic).

Tema 2

Deducción natural proposicional

Contenido

2.1. Reglas de deducción natural **19**

2.1.1. Reglas de la conjunción 19

2.1.2. Reglas de la doble negación 19

2.1.3. Regla de eliminación del condicional 20

2.1.4. Regla derivada de modus tollens (MT) 20

2.1.5. Regla de introducción del condicional 21

2.1.6. Reglas de la disyunción 22

2.1.7. Regla de copia 23

2.1.8. Reglas de la negación 23

2.1.9. Reglas del bicondicional 25

2.2. Reglas derivadas **25**

2.2.1. Regla del modus tollens 25

2.2.2. Regla de introducción de doble negación 26

2.2.3. Regla de reducción al absurdo 26

2.2.4. Ley del tercio excluido 26

2.3. Resumen de reglas de deducción natural **28**

2.1. Reglas de deducción natural

2.1.1. Reglas de la conjunción

- Regla de introducción de la conjunción: $\dfrac{F \quad G}{F \land G} \land i$

- Reglas de eliminación de la conjunción: $\dfrac{F \land G}{F} \land e_1 \quad \dfrac{F \land G}{G} \land e_2$

- Ejemplo: $p \land q, r \vdash q \land r$:

1	$p \land q$	premisa
2	r	premisa
3	q	$\land e_2$ 1
4	$q \land r$	$\land i$ 2, 3

- Adecuación de las reglas de la conjunción:
  - $\land i : \{F, G\} \models F \land G$
  - $\land e_1 : F \land G \models F$
  - $\land e_2 : F \land G \models G$

2.1.2. Reglas de la doble negación

- Regla de eliminación de la doble negación: $\dfrac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$

- Regla de introducción de la doble negación: $\dfrac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$

- Ejemplo: $p, \neg\neg(q \land r) \vdash \neg\neg p \land r$:

1	p	premisa
2	$\neg\neg(q \land r)$	premisa
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 1
4	$q \land r$	$\neg\neg e$ 2
5	r	$\land e_2$ 4
6	$\neg\neg p \land r$	$\land i$ 3, 5

- Adecuación de las reglas de la doble negación:
  - $\neg\neg e : \{\neg\neg F\} \models F$
  - $\neg\neg i : \{F\} \models \neg\neg F$

2.1.3. Regla de eliminación del condicional

- Regla de eliminación del condicional: $\dfrac{F \quad F \to G}{G} \to e$

- Ejemplo: $\neg p \land q, \neg p \land q \to r \lor \neg p \vdash r \lor \neg p$:

1	$\neg p \land q$	premisa
2	$\neg p \land q \to r \lor \neg p$	premisa
3	$r \lor \neg p$	$\to$e $1,2$

- Ejemplo: $p, p \to q, p \to (q \to r) \vdash r$:

1	p	premisa
2	$p \to q$	premisa
3	$p \to (q \to r)$	premisa
4	q	$\to$e $1,2$
5	$q \to r$	$\to$e $1,3$
6	r	$\to$e $4,5$

- Adecuación de la eliminación del condicional: $\{F, F \to G\} \models G$

2.1.4. Regla derivada de modus tollens (MT)

- Regla derivada de modus tollens: $\dfrac{F \to G \quad \neg G}{\neg F}\ MT$

- Ejemplo: $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$:

1	$p \to (q \to r)$	premisa
2	p	premisa
3	$\neg r$	premisa
4	$q \to r$	$\to$e $1,2$
5	$\neg q$	MT $3,4$

- Ejemplo: $\neg p \to q, \neg q \vdash p$:

1	$\neg p \to q$	premisa
2	$\neg q$	premisa
3	$\neg\neg p$	MT $1,2$
4	p	$\neg\neg$e 3

2.1.5. Regla de introducción del condicional

- Regla de introducción del condicional: $$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ G \end{array}}}{F \to G} \to \mathrm{i}$$

- Ejemplo: $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$:

1	$p \to q$	premisa
2	$\neg q$	supuesto
3	$\neg p$	MT $1,2$
4	$\neg q \to \neg p$	$\to$i $2-3$

- Adecuación de la regla de introducción del condicional: Si $F \models G$, entonces $\models F \to G$.

- Ejemplo: $\neg q \to \neg p \vdash p \to \neg\neg q$:

1	$\neg q \to \neg p$	premisa
2	p	supuesto
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg$i 2
4	$\neg\neg q$	MT $1,3$
5	$p \to \neg\neg q$	$\to$i $2-4$

- Ejemplo (de teorema): $\vdash p \to p$:

1	p	supuesto
2	$p \to p$	$\to$i $1-1$

- Ejemplo: $\vdash (q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$:

1	$q \to r$	supuesto
2	$\neg q \to \neg p$	supuesto
3	p	supuesto
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg$i 3
5	$\neg\neg q$	MT 2, 4
6	q	$\neg\neg$e 5
7	r	$\to$e 1, 6
8	$p \to r$	$\to$i $3-7$
9	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	$\to$i $2-8$
10	$(q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$	$\to$i $1-9$

2.1.6. Reglas de la disyunción

- Reglas de introducción de la disyunción: $\dfrac{F}{F \vee G}\,\vee i_1 \qquad \dfrac{G}{F \vee G}\,\vee i_2$

- Regla de eliminación de la disyunción: $\dfrac{F \vee G \quad \boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ H \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} G \\ \vdots \\ H \end{array}}}{H}\,\vee e$

- Ejemplo: $p \vee q \vdash q \vee p$:

1	$p \vee q$	premisa
2	p	supuesto
3	$q \vee p$	$\vee i_2$ 2
4	q	supuesto
5	$q \vee p$	$\vee i_1$ 4
6	$q \vee p$	$\vee e$ $1, 2-3, 4-5$

- Ejemplo: $q \to r \vdash p \vee q \to p \vee r$:

1	$q \to r$	premisa
2	$p \lor q$	supuesto
3	p	supuesto
4	$p \lor r$	$\lor i_1$ 3
5	q	supuesto
6	r	$\to e$ 1, 5
7	$p \lor r$	$\lor i_2$ 6
8	$p \lor r$	$\lor e$ 2, 3 − 4, 5 − 7
9	$p \lor q \to p \lor r$	$\to i$ 2 − 8

2.1.7. Regla de copia

- Ejemplo (usando la regla hyp): $\vdash p \to (q \to p)$:

1	p	supuesto
2	q	supuesto
3	p	hyp 1
4	$q \to p$	$\to i$ 2 − 3
5	$p \to (q \to p)$	$\to i$ 1 − 4

2.1.8. Reglas de la negación

- Extensiones de la lógica para usar falso:
  - Extensión de la sintaxis: $\bot$ es una fórmula proposicional.
  - Extensión de la semántica: $I(\bot) = 0$ en cualquier interpretación I.
- Reglas de la negación:
  - Regla de eliminación de lo falso: $\dfrac{\bot}{F}\ \bot e$
  - Regla de eliminación de la negación: $\dfrac{F \quad \neg F}{\bot}\ \neg e$
- Adecuación de las reglas de la negación:
  - $\bot \models F$

- $\{F, \neg F\} \models \bot$

- Ejemplo: $\neg p \lor q \vdash p \to q$:

1	$\neg p \lor q$	premisa
2	p	supuesto
3	$\neg p$	supuesto
4	$\bot$	$\neg$e $2,3$
5	q	$\bot$e 4
6	q	supuesto
7	q	$\lor$e $1, 3-5, 6-6$
8	$p \to q$	$\to$i $2-7$

- Regla de introducción de la negación: $$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \bot \end{array}}}{\neg F}\ \neg\text{i}$$

- Adecuación: Si $F \models \bot$, entonces $\models \neg F$.

- Ejemplo: $p \to q, p \to \neg q \vdash \neg p$:

1	$p \to q$	premisa
2	$p \to \neg q$	premisa
3	p	supuesto
4	q	$\to$e $1,3$
5	$\neg q$	$\to$e $2,3$
6	$\bot$	$\neg$e $4,5$
7	$\neg p$	$\neg$i $3-6$

2.1.9. Reglas del bicondicional

- Regla de introducción del bicondicional: $$\frac{F \to G \quad G \to F}{F \leftrightarrow G}\ \leftrightarrow \text{i}$$

- Ejemplo: $p \land q \leftrightarrow q \land p$:

1	$p \land q$	supuesto
2	p	$\land e_1$ 1
3	q	$\land e_2$ 1
4	$q \land p$	$\land i$ 2, 3
5	$p \land q \to q \land p$	$\to i$ 1 − 4
6	$q \land p$	supuesto
7	q	$\land e_2$ 6
8	p	$\land e_1$ 6
9	$p \land q$	$\land i$ 7, 8
10	$q \land p \to p \land q$	$\to i$ 6 − 9
11	$p \land q \leftrightarrow q \land p$	$\leftrightarrow i$ 5, 10

- Eliminación del bicondicional: $\dfrac{F \leftrightarrow G}{F \to G} \leftrightarrow e_1 \quad \dfrac{F \leftrightarrow G}{G \to F} \leftrightarrow e_2$
- Ejemplo: $p \leftrightarrow q, p \lor q \vdash p \land q$:

1	$p \leftrightarrow q$			premisa
2	$p \lor q$			premisa
3	p	supuesto	q	supuesto
4	$p \to q$	$\leftrightarrow e_1$ 1	$q \to p$	$\leftrightarrow e_2$ 1
5	q	$\to e$ 4, 3	p	$\to e$ 4′, 3′
6	$p \land q$	$\land i$ 3, 5	$p \land q$	$\land i$ 3′, 5′
7	$p \land q$			$\lor e$ 2, 3 − 6, 3′ − 6′

2.2. Reglas derivadas

2.2.1. Regla del modus tollens

- Regla derivada de modus tollens (MT): $\dfrac{F \to G \quad \neg G}{\neg F} MT$
- Derivación:

1	$F \to G$	premisa
2	$\neg G$	premisa
3	F	supuesto
4	G	$\to$e $1,3$
5	$\bot$	$\neg$e $2,4$
6	$\neg F$	$\neg$i $2-4$

2.2.2. Regla de introducción de doble negación

- Regla de introducción de la doble negación: $\dfrac{F}{\neg\neg F}\ \neg\neg\text{i}$
- Derivación:

1	F	premisa
2	$\neg F$	supuesto
3	$\bot$	$\neg$e $1,2$
4	$\neg\neg F$	$\neg$i $2-3$

2.2.3. Regla de reducción al absurdo

- Regla de reducción al absurdo: $\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\neg F\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{F}\ RAA$
- Derivación:

1	$\neg F \to \bot$	premisa
2	$\neg F$	supuesto
3	$\bot$	$\to$e $1,2$
4	$\neg\neg F$	$\neg$i $2-3$
5	F	$\neg$e $\neg 4$

2.2.4. Ley del tercio excluido

- Ley del tercio excluido (LEM): $\dfrac{}{F \lor \neg F}\ LEM$

- Derivación:

1	$\neg(F \vee \neg F)$	supuesto
2	F	supuesto
3	$F \vee \neg F$	$\vee$i$_1$ 2
4	$\perp$	$\neg$e 1, 3
5	$\neg F$	$\neg$i 2 − 4
6	$F \vee \neg F$	$\vee$i$_2$ 5
7	$\perp$	$\neg$e 1, 6
8	$F \vee \neg F$	RAA 1 − 7

- Ejemplo: $p \to q \vdash \neg p \vee q$:

1	$p \to q$	premisa
2	$p \vee \neg p$	LEM
3	p	supuesto
4	q	$\to$e 1, 3
5	$\neg p \vee q$	$\vee$i$_2$ 4
6	$\neg p$	supuesto
7	$\neg p \vee q$	$\vee$i$_1$ 6
8	$\neg p \vee q$	$\vee$e 2, 3 − 5, 6 − 7

2.3. Resumen de reglas de deducción natural

	Introducción	Eliminación
$\wedge$	$\dfrac{F \quad G}{F \wedge G}\wedge i$	$\dfrac{F \wedge G}{F}\wedge e_1 \qquad \dfrac{F \wedge G}{G}\wedge e_2$
$\vee$	$\dfrac{F}{F \vee G}\vee i_1 \qquad \dfrac{G}{F \vee G}\vee i_2$	$\dfrac{F \vee G \quad \boxed{\begin{array}{c}F\\ \vdots\\ H\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}G\\ \vdots\\ H\end{array}}}{H}\vee e$
$\rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}F\\ \vdots\\ G\end{array}}}{F \rightarrow G}\rightarrow i$	$\dfrac{F \quad F \rightarrow G}{G}\rightarrow e$
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}F\\ \vdots\\ \perp\end{array}}}{\neg F}\neg i$	$\dfrac{F \quad \neg F}{\perp}\neg e$
$\perp$		$\dfrac{\perp}{F}\perp e$
$\neg\neg$		$\dfrac{\neg\neg F}{F}\neg\neg e$
$\leftrightarrow$	$\dfrac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G}\leftrightarrow i$	$\dfrac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G}\leftrightarrow e_1 \qquad \dfrac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F}\leftrightarrow e_2$

- Adecuación y completitud del cálculo de deducción natural.

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000).

   Cap. 16: Cálculo deductivo.

2. R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998).

3. J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002).

Cap. 4: Cálculo deductivo. Deducibilidad.

4. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000)

   Cap. 1: Propositional logic.

5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)

   Cap. 3.6: El método de la deducción natural.

Tema 3

Tableros semánticos

Contenido

3.1. **Búsqueda de modelos** 31
3.2. **Notación uniforme** 33
3.3. **Procedimiento de completación de tableros** 34
3.4. **Modelos por tableros semánticos** 35
3.5. **Consistencia mediante tableros** 36
3.6. **Teorema por tableros** 36
3.7. **Deducción por tableros** 36
3.8. **Tableros en notación reducida** 37

3.1. Búsqueda de modelos

Búsqueda exitosa de modelos

- Búsqueda de modelos de $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r))$

$$
\begin{array}{ll}
 & I \models \neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r)) \\
\text{syss} & I \models \{\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r))\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \lor \neg q, \neg\neg(p \land r)\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \lor \neg q, p \land r\} \\
\text{syss} & I \models \{p, r, \neg p \lor \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{p, r, \neg p\} \text{ ó } I \models \{p, r, \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{\bot\} \text{ ó } I \models \{p, r, \neg q\}
\end{array}
$$

- Modelos de $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r))$:
  Las interpretaciones I tales que $I(p) = 1$, $I(q) = 0$ e $I(r) = 1$.

Búsqueda exitosa de modelos por tableros semánticos

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \boxed{\neg((\neg p \lor \neg q) \to \neg(p \land r))} \arrow[d, dash] & \\
& \boxed{\neg p \lor \neg q, \neg\neg(p \land r)} \arrow[d, dash] & \\
& \boxed{\neg p \lor \neg q, p \land r} \arrow[d, dash] & \\
& \boxed{\neg p \lor \neg q, p, r} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\boxed{\neg p, p, r} \arrow[d, dash] & & \boxed{\neg q, p, r} \\
\boxed{\bot} & &
\end{tikzcd}
$$

Búsqueda fallida de modelos

- Búsqueda de modelos de $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))$.

$$
\begin{array}{ll}
& I \models \neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q)) \\
\text{syss} & I \models \{\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \lor \neg q, \neg\neg(p \land q)\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \lor \neg q, p \land q\} \\
\text{syss} & I \models \{p, q, \neg p \lor \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{p, q, \neg p\} \text{ ó } I \models \{p, q, \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{\bot\} \text{ ó } I \models \{\bot\}
\end{array}
$$

- La fórmula $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))$ no tiene modelos (es insatisfacible).

Búsqueda fallida de modelos por tableros semánticos

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \boxed{\neg((\neg p \lor \neg q) \to \neg(p \land q))} \arrow[d, dash] & \\
& \boxed{\neg p \lor \neg q, \neg\neg(p \land q)} \arrow[d, dash] & \\
& \boxed{\neg p \lor \neg q, p \land q} \arrow[d, dash] & \\
& \boxed{\neg p \lor \neg q, p, q} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\boxed{\neg p, p, q} \arrow[d, dash] & & \boxed{\neg q, p, q} \arrow[d, dash] \\
\boxed{\bot} & & \boxed{\bot}
\end{tikzcd}
$$

3.2. Notación uniforme

Literales y dobles negaciones

- Literales
  - Un literal es un átomo o la negación de un átomo (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \dots$).
  - $I \models p$ syss $I(p) = 1$.
  - $I \models \neg p$ syss $I(p) = 0$.
- Dobles negaciones
  - F es una doble negación si es de la forma $\neg\neg G$.
  - $I \models \neg\neg G$ syss $I \models G$.
- Reducción de modelos:
  - $I \models F \wedge G$ syss $I \models F$ e $I \models G$.
  - $I \models F \vee G$ syss $I \models F$ ó $I \models G$.

Fórmulas alfa y beta

- Las fórmulas alfa, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

- Si F es alfa con componentes F_1 y F_2, entonces $F \equiv F_1 \wedge F_2$.
- Las fórmulas beta, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

- Si F es beta con componentes F_1 y F_2, entonces $F \equiv F_1 \vee F_2$.

3.3. Procedimiento de completación de tableros

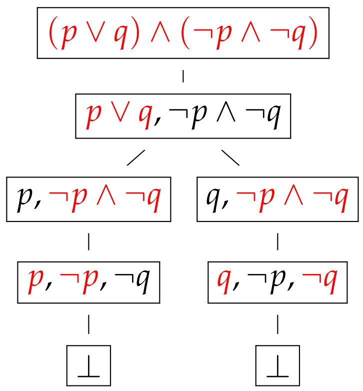
Tablero del conjunto de fórmulas S

Un tablero del conjunto de fórmulas S es un árbol construido mediante las reglas:

- El árbol cuyo único nodo tiene como etiqueta S es un tablero de S.
- Sea $\mathcal{T}$ un tablero de S y S_1 la etiqueta de una hoja de $\mathcal{T}$.
  1. Si S_1 contiene una fórmula y su negación, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $\{\perp\}$ es un tablero de S.
  2. Si S_1 contiene una doble negación $\neg\neg F$, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{\neg\neg F\}) \cup \{F\}$ es un tablero de S.
  3. Si S_1 contiene una fórmula alfa F de componentes F_1 y F_2, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1, F_2\}$ es un tablero de S.
  4. Si S_1 contiene una fórmula beta F de componentes F_1 y F_2, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijos de S_1 los nodos etiquetados con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1\}$ y $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_2\}$ es un tablero de S.

No unicidad del tablero de un conjunto de fórmulas

- Un tablero completo de $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ es



- Otro tablero completo de $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ es

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \boxed{(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)} \arrow[d, dash] & \\
& \boxed{p \lor q, \neg p \land \neg q} \arrow[d, dash] & \\
& \boxed{p \lor q, \neg p, \neg q} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\boxed{p, \neg p, \neg q} \arrow[d, dash] & & \boxed{q, \neg p, \neg q} \arrow[d, dash] \\
\boxed{\bot} & & \boxed{\bot}
\end{tikzcd}
$$

3.4. Modelos por tableros semánticos

- Def.: Sea S un conjunto de fórmulas, $\mathcal{T}$ un tablero de S.
  - Una hoja de $\mathcal{T}$ es cerrada si contiene una fórmula y su negación o es de la forma $\{\bot\}$.
  - Una hoja de $\mathcal{T}$ es abierta si es un conjunto de literales y no contiene un literal y su negación.
- Def.: Un tablero completo de S es un tablero de S tal que todas sus hojas son abiertas o cerradas.
- Def.: Un tablero es cerrado si todas sus hojas son cerradas.
- Reducción de modelos:
  - $I \models F \land G$ syss $I \models F$ e $I \models G$.
  - $I \models F \lor G$ syss $I \models F$ ó $I \models G$.
- Propiedades:
  1. Si las hojas de un tablero del conjunto de fórmulas $\{F_1, \dots, F_n\}$ son $\{G_{1,1}, \dots, G_{1,n_1}\}, \dots, \{G_{m,1}, \dots, G_{m,n_m}\}$, entonces $F_1 \land \dots \land F_n \equiv (G_{1,1} \land \dots \land G_{1,n_1}) \lor \dots \lor (G_{m,1} \land \dots \land G_{m,n_m})$.
  2. Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas, $\mathcal{T}$ un tablero de S e I una interpretación. Entonces, $I \models S$ syss existe una hoja S_1 de $\mathcal{T}$ tal que $I \models S_1$.

3.5. Consistencia mediante tableros

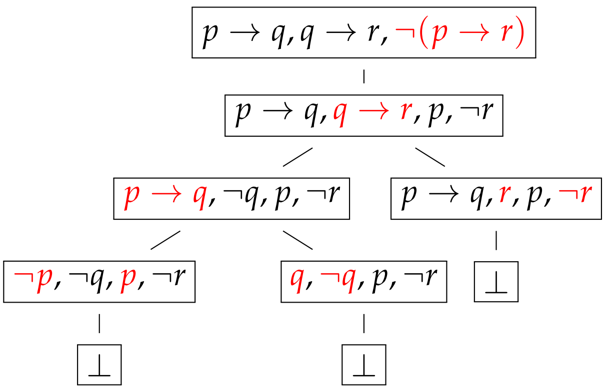
- Prop.: Si $\{p_1, \dots, p_n, \neg q_1, \dots, \neg q_m\}$ es una hoja abierta de un tablero del conjunto de fórmulas S, entonces la interpretación I tal que $I(p_1) = 1, \dots, I(p_n) = 1$, $I(q_1) = 0, \dots, I(q_m) = 0$ es un modelo de S.
- Prop.: Un conjunto de fórmulas S es consistente syss S tiene un tablero con alguna hoja abierta.
- Prop.: Un conjunto de fórmulas S es inconsistente syss S tiene un tablero completo cerrado.

3.6. Teorema por tableros

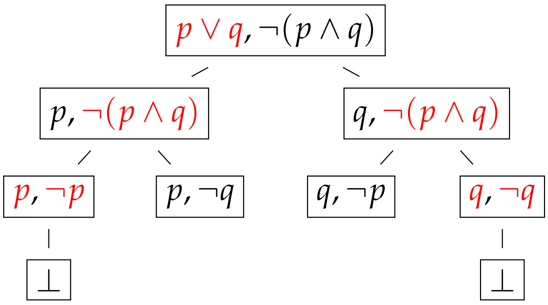
- Def.: Una fórmula F es un teorema (mediante tableros semánticos) si tiene una prueba mediante tableros; es decir, si $\{\neg F\}$ tiene un tablero completo cerrado.
  Se representa por $\vdash_{Tab} F$.
- Ejemplos: $\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$
  $\nvdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$
- Teor.: El cálculo de tableros semánticos es adecuado y completo; es decir,
  Adecuado: $\vdash_{Tab} F \quad \Rightarrow \quad \models F$
  Completo: $\models F \quad \Rightarrow \quad \vdash_{Tab} F$

3.7. Deducción por tableros

- Def.: La fórmula F es deducible (mediante tableros semánticos) a partir del conjunto de fórmulas S si existe un tablero completo cerrado de $S \cup \{\neg F\}$. Se representa por $S \vdash_{Tab} F$.
- Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_{Tab} p \rightarrow r$



- Ejemplo: $\{p \lor q\} \nvdash_{Tab} p \land q$

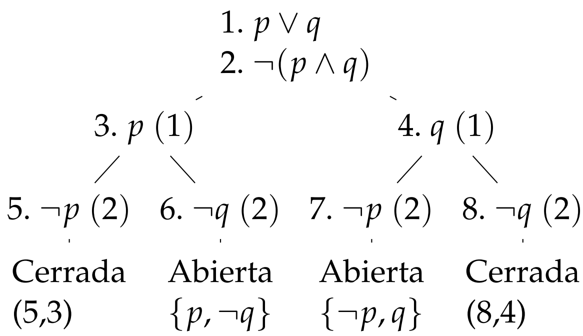


- Contramodelos de $\{p \lor q\} \nvdash_{Tab} p \land q$
  las interpretaciones I_1 tales que $I_1(p) = 1$ e $I_1(q) = 0$
  las interpretaciones I_2 tales que $I_2(p) = 0$ e $I_2(q) = 1$

- Teor.: $S \vdash_{Tab} F$ syss $S \models F$.

3.8. Tableros en notación reducida

- Ejemplo: $\{p \lor q\} \nvdash_{Tab} p \land q$



Bibliografía

1. Ben–Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)

   Cap. 2: Propositional calculus: formulas, models, tableaux

2. Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995)

   Cap. 3: Semantic tableaux and resolution

3. Hortalá, M.T.; Leach, J. y Rogríguez, M. *Matemática discreta y lógica matemática* (Ed. Complutense, 1998)

   Cap. 7.9: Tableaux semánticos para la lógica de proposiciones

4. Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)

   Cap. 1.4: Tableau proofs in propositional calculus

5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)

   Cap. 4.3: Métodos de las tablas semánticas

* Un ejemplo de no consecuencia con más de un contramodelo.

Tema 4

Formas normales

Contenido

4.1. **Forma normal conjuntiva** **39**

4.1.1. Definición de forma normal conjuntiva 39

4.1.2. Algoritmo de cálculo de forma normal conjuntiva 39

4.1.3. Decisión de validez mediante FNC 41

4.2. **Forma normal disyuntiva** **42**

4.2.1. Definición de forma normal disyuntiva 42

4.2.2. Algoritmo de cálculo de forma normal disyuntiva 42

4.2.3. Decisión de satisfacibilidad mediante FND 43

4.3. **Cálculo de formas normales mediante tableros semánticos** **44**

4.3.1. Forma normal disyuntiva por tableros 44

4.3.2. Forma normal conjuntiva por tableros 44

4.1. Forma normal conjuntiva

4.1.1. Definición de forma normal conjuntiva

- Átomos y literales:
  - Def.: Un átomo es una variable proposicional (p.e. $p, q, \dots$).
  - Def.: Un literal es un átomo o su negación (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \dots$).
  - Notación: $L, L_1, L_2, \dots$ representarán literales.
- Forma normal conjuntiva:

- Def.: Una fórmula está en forma normal conjuntiva (FNC) si es una conjunción de disyunciones de literales; es decir, es de la forma
  $(L_{1,1} \lor \cdots \lor L_{1,n_1}) \land \cdots \land (L_{m,1} \lor \cdots \lor L_{m,n_m})$.
- Ejemplos: $(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)$ está en FNC.
  $(\neg p \lor q) \land (q \to p)$ no está en FNC.
- Def.: Una fórmula G es una forma normal conjuntiva (FNC) de la fórmula F si G está en forma normal conjuntiva y es equivalente a F.
- Ejemplo: Una FNC de $\neg(p \land (q \to r))$ es $(\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg r)$.

4.1.2. Algoritmo de cálculo de forma normal conjuntiva

Algoritmo: Aplicando a una fórmula F los siguientes pasos se obtiene una forma normal conjuntiva de F, $\mathsf{FNC}(F)$:

1. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
   $$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \land (B \to A) \quad (1)$$
2. Eliminar los condicionales usando la equivalencia
   $$A \to B \equiv \neg A \lor B \quad (2)$$
3. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias
   $$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B \quad (3)$$
   $$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B \quad (4)$$
   $$\neg\neg A \equiv A \quad (5)$$
4. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias
   $$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C) \quad (6)$$
   $$(A \land B) \lor C \equiv (A \lor C) \land (B \lor C) \quad (7)$$

Ejemplos de cálculo de forma normal conjuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $\neg(p \land (q \to r))$:
  $$\begin{array}{lll} & \neg(p \land (q \to r)) & \\ \equiv & \neg(p \land (\neg q \lor r)) & [\text{por } (2)] \\ \equiv & \neg p \lor \neg(\neg q \lor r) & [\text{por } (3)] \\ \equiv & \neg p \lor (\neg\neg q \land \neg r) & [\text{por } (4)] \\ \equiv & \neg p \lor (q \land \neg r) & [\text{por } (5)] \\ \equiv & (\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg r) & [\text{por } (6)] \end{array}$$
- Ejemplo de cálculo de una FNC de $(p \to q) \lor (q \to p)$:
  $$\begin{array}{lll} & (p \to q) \lor (q \to p) & \\ \equiv & (\neg p \lor q) \lor (\neg q \lor p) & [\text{por } (2)] \\ \equiv & \neg p \lor q \lor \neg q \lor p & \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $(p \leftrightarrow q) \to r$:

$$
\begin{array}{lll}
 & (p \leftrightarrow q) \to r & \\
\equiv & (p \to q) \land (q \to p) \to r & [(1)] \\
\equiv & \neg((p \to q) \land (q \to p)) \lor r & [(2)] \\
\equiv & \neg((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)) \lor r & [(2)] \\
\equiv & (\neg(\neg p \lor q) \lor \neg(\neg q \lor p)) \lor r & [(3)] \\
\equiv & ((\neg\neg p \land \neg q) \lor (\neg\neg q \land \neg p)) \lor r & [(4)] \\
\equiv & ((p \land \neg q) \lor (q \land \neg p)) \lor r & [(5)] \\
\equiv & (((p \land \neg q) \lor q) \land ((p \land \neg q) \lor \neg p)) \lor r & [(6)] \\
\equiv & (((p \lor q) \land (\neg q \lor q)) \land ((p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p))) \lor r & [(7)] \\
\equiv & (((p \lor q) \land (\neg q \lor q)) \lor r) \land (((p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p)) \lor r) & [(7)] \\
\equiv & (((p \lor q) \lor r) \land ((\neg q \lor q) \lor r)) \land (((p \lor \neg p) \lor r) \land ((\neg q \lor \neg p) \lor r)) & [(7)] \\
\equiv & (p \lor q \lor r) \land (\neg q \lor q \lor r) \land (p \lor \neg p \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor r) & \\
\equiv & (p \lor q \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor r) &
\end{array}
$$

4.1.3. Decisión de validez mediante FNC

Procedimiento de decisión de validez mediante FNC

- Literales complementarios:
  - El complementario de un literal L es $L^c = \begin{cases} \neg p & \text{si } L = p; \\ p & \text{si } L = \neg p. \end{cases}$
- Propiedades de reducción de tautologías:
  - $F_1 \land \cdots \land F_n$ es una tautología syss $F_1, \dots, F_n$ lo son.
  - $L_1 \lor \cdots \lor L_n$ es una tautología syss $\{L_1, \dots, L_n\}$ contiene algún par de literales complementarios (i.e. existen i, j tales que $L_i = L_j^c$).
- Algoritmo de decisión de tautologías mediante FNC
  - Entrada: Una fórmula F.
  - Procedimiento:
    1. Calcular una FNC de F.
    2. Decidir si cada una de las disyunciones de la FNC tiene algún par de literales complementarios.

Ejemplos de decisión de validez mediante FNC

- $\neg(p \land (q \to r))$ no es tautología:
  $\mathsf{FNC}(\neg(p \land (q \to r))) = (\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg r)$
  Contramodelos de $\neg(p \land (q \to r))$:
  I_1 tal que $I_1(p) = 1$ y $I_1(q) = 0$
  I_2 tal que $I_2(p) = 1$ y $I_2(r) = 1$

- $(p \to q) \lor (q \to p)$ es tautología:
  $\mathsf{FNC}((p \to q) \lor (q \to p)) = \neg p \lor q \lor \neg q \lor p$

- $(p \leftrightarrow q) \to r$ no es tautología:
  $\mathsf{FNC}((p \leftrightarrow q) \to r) = (p \lor q \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor r)$
  Contramodelos de $(p \leftrightarrow q) \to r$:
  I_1 tal que $I_1(p) = 0, I_1(q) = 0$ y $I_1(r) = 0$
  I_2 tal que $I_2(p) = 1, I_2(q) = 1$ y $I_2(r) = 0$

4.2. Forma normal disyuntiva

4.2.1. Definición de forma normal disyuntiva

- Def.: Una fórmula está en forma normal disyuntiva (FND) si es una disyunción de conjunciones de literales; es decir, es de la forma
  $(L_{1,1} \land \dots \land L_{1,n_1}) \lor \dots \lor (L_{m,1} \land \dots \land L_{m,n_m})$.

- Ejemplos: $(\neg p \land q) \lor (\neg q \land p)$ está en FND.
  $(\neg p \land q) \lor (q \to p)$ no está en FND.

- Def.: Una fórmula G es una forma normal disyuntiva (FND) de la fórmula F si G está en forma normal disyuntiva y es equivalente a F.

- Ejemplo: Una FND de $\neg(p \land (q \to r))$ es $\neg p \lor (q \land \neg r)$.

4.2.2. Algoritmo de cálculo de forma normal disyuntiva

Algoritmo de cálculo de forma normal disyuntiva

Algoritmo: Aplicando a una fórmula F los siguientes pasos se obtiene una forma normal disyuntiva de F, $\mathsf{FND}(F)$:

1. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
   $$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \land (B \to A) \tag{1}$$

2. Eliminar los condicionales usando la equivalencia
   $$A \to B \equiv \neg A \lor B \tag{2}$$

3. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias
$$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B \quad (3)$$
$$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B \quad (4)$$
$$\neg\neg A \equiv A \quad (5)$$

4. Interiorizar las conjunciones usando las equivalencias
$$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C) \quad (6)$$
$$(A \lor B) \land C \equiv (A \land C) \lor (B \land C) \quad (7)$$

Ejemplos de cálculo de forma normal disyuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FND de $\neg(p \land (q \to r))$:
$$\begin{array}{lll} & \neg(p \land (q \to r)) & \\ \equiv & \neg(p \land (\neg q \lor r)) & \text{[por (2)]} \\ \equiv & \neg p \lor \neg(\neg q \lor r) & \text{[por (3)]} \\ \equiv & \neg p \lor (\neg\neg q \land \neg r) & \text{[por (4)]} \\ \equiv & \neg p \lor (q \land \neg r) & \text{[por (5)]} \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una FND de $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))$:
$$\begin{array}{lll} & \neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q)) & \\ \equiv & \neg(\neg(\neg p \lor \neg q) \lor \neg(p \land q)) & \text{[por (2)]} \\ \equiv & \neg\neg(\neg p \lor \neg q) \land \neg\neg(p \land q) & \text{[por (4)]} \\ \equiv & (\neg p \lor \neg q) \land (p \land q) & \text{[por (5)]} \\ \equiv & (\neg p \land (p \land q)) \lor (\neg q \land (p \land q)) & \text{[por (7)]} \\ \equiv & (\neg p \land p \land q) \lor (\neg q \land p \land q) & \end{array}$$

4.2.3. Decisión de satisfacibilidad mediante FND

Procedimiento de decisión de satisfacibilidad mediante FND

- Propiedades de reducción de satisfacibilidad:
  - $F_1 \lor \cdots \lor F_n$ es satisfacible syss alguna de las fórmulas $F_1, \ldots, F_n$ lo es.
  - $L_1 \land \cdots \land L_n$ es satisfacible syss $\{L_1, \ldots, L_n\}$ no contiene ningún par de literales complementarios.
- Algoritmo de decisión de satisfacibilidad mediante FND:
  - Entrada: Una fórmula F.
  - Procedimiento:
    1. Calcular una FND de F.
    2. Decidir si alguna de las conjunciones de la FND no tiene un par de literales complementarios.

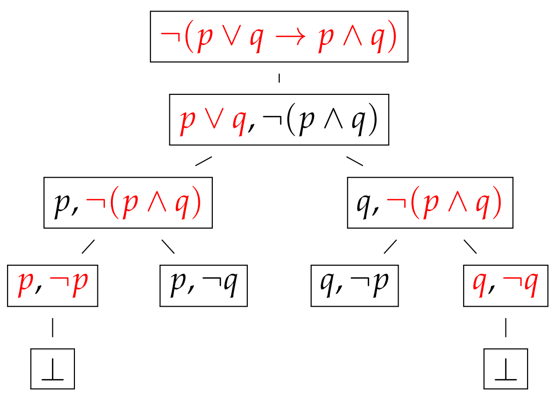
Ejemplos de decisión de satisfacibilidad mediante FND

- $\neg(p \land (q \to r))$ es satisfacible:
  $\mathsf{FND}(\neg(p \land (q \to r))) = \neg p \lor (q \land \neg r)$
  Modelos de $\neg(p \land (q \to r))$:
  I_1 tal que $I_1(p) = 0$
  I_2 tal que $I_2(q) = 1$ y $I_2(r) = 0$
- $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))$ es insatisfacible:
  $\mathsf{FND}(\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))) = (\neg p \land p \land q) \lor (\neg q \land p \land q)$

4.3. Cálculo de formas normales mediante tableros semánticos

4.3.1. Forma normal disyuntiva por tableros

- Prop.: Sea F una fórmula. Si las hojas abiertas de un tablero completo de $\{F\}$ son $\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}$, entonces una forma normal disyuntiva de F es $(L_{1,1} \land \dots \land L_{1,n_1}) \lor \dots \lor (L_{m,1} \land \dots \land L_{m,n_m})$.
- Ejemplo: Forma normal disyuntiva de $\neg(p \lor q \to p \land q)$.



Una forma normal disyuntiva de $\neg(p \lor q \to p \land q)$ es $(p \land \neg q) \lor (q \land \neg p)$.

4.3.2. Forma normal conjuntiva por tableros

- Prop.: Sea F una fórmula. Si las hojas abiertas de un tablero completo de $\{\neg F\}$ son $\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}$, entonces una forma normal conjuntiva de F es $(L^c_{1,1} \lor \dots \lor L^c_{1,n_1}) \land \dots \land (L^c_{m,1} \lor \dots \lor L^c_{m,n_m})$.
- Ejemplo: Forma normal conjuntiva de $p \lor q \to p \land q$.

- Un árbol completo $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$ está en la transparencia anterior.
- Una forma normal disyuntiva de $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$ es $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$.
- Una forma normal conjuntiva de $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ es $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

$$\begin{aligned}
p \vee q \rightarrow p \wedge q &\equiv \neg\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q) \\
&\equiv \neg((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \\
&\equiv \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg\neg q) \wedge (\neg q \vee \neg\neg p)) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p))
\end{aligned}$$

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000)

   Cap. 8 (Equivalencia lógica) y 10 (Formas normales).

2. M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.).* (Springer, 2001)

   Cap. 2 (Propositional calculus: formulas, models, tableaux).

3. J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002)

   Cap. 3 (Semántica formal. Consecuencia lógica).

4. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000)

   Cap. 1 (Propositional logic).

5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)

   Cap. 4.4 (Formas normales).

* Añadir ejemplos de últimos algoritmos.

* 13-Mar-05: Cambiar a estilo con color p. 1-7. * 14-Mar-05: Cambiar a estilo con color p. 7-15.

Tema 5

Resolución proposicional

Contenido

5.1. Lógica de cláusulas **47**
5.1.1. Sintaxis de la lógica clausal 47
5.1.2. Semántica de la lógica clausal 47
5.1.3. Equivalencias entre cláusulas y fórmulas 48
5.1.4. Modelos, consistencia y consecuencia entre cláusulas 49
5.1.5. Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas 49
5.2. Demostraciones por resolución **50**
5.2.1. Regla de resolución proposicional 50
5.2.2. Demostraciones por resolución 50
5.3. Algoritmos de resolución **53**
5.3.1. Algoritmo de resolución por saturación 53
5.3.2. Algoritmo de saturación con simplificación 54
5.4. Refinamientos de resolución **55**
5.4.1. Resolución positiva 55
5.4.2. Resolución negativa 56
5.4.3. Resolución unitaria 57
5.4.4. Resolución por entradas 57
5.4.5. Resolución lineal 58
5.5. Argumentación por resolución **58**
5.5.1. Formalización de argumentación por resolución 58
5.5.2. Decisión de argumentación por resolución 59

5.1. Lógica de cláusulas

5.1.1. Sintaxis de la lógica clausal

- Un átomo es una variable proposicional.
  Variables sobre átomos: $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$.
- Un literal es un átomo (p) o la negación de un átomo ($\neg p$).
  Variables sobre literales: $L, L_1, L_2, \dots$.
- Una cláusula es un conjunto finito de literales.
  Variables sobre cláusulas: $C, C_1, C_2, \dots$.
- La cláusula vacía es el conjunto vacío de literales.
  La cláusula vacía se representa por $\square$.
- Conjuntos finitos de cláusulas.
  Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: $S, S_1, S_2, \dots$.

5.1.2. Semántica de la lógica clausal

- Una interpretación es una aplicación $I : \text{VP} \to \mathbb{B}$.
- El valor de un literal positivo p en una interpretación I es $I(p)$.
- El valor de un literal negativo $\neg p$ en una interpretación I es
  $$I(\neg p) = \begin{cases} 1, & \text{si } I(p) = 0; \\ 0, & \text{si } I(p) = 1. \end{cases}$$
- El valor de una cláusula C en una interpretación I es
  $$I(C) = \begin{cases} 1, & \text{si existe un } L \in C \text{ tal que } I(L) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
- El valor de un conjunto de cláusulas S en una interpretación I es
  $$I(S) = \begin{cases} 1, & \text{si para toda } C \in S, I(C) = 1 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
- Prop.: En cualquier interpretación I, $I(\square) = 0$.

5.1.3. Equivalencias entre cláusulas y fórmulas

Cláusulas y fórmulas

- Equivalencias entre cláusulas y fórmulas
  - Def.: Una cláusula C y una fórmula F son equivalentes si $I(C) = I(F)$ para cualquier interpretación I.
  - Def.: Un conjunto de cláusulas S y una fórmula F son equivalentes si $I(S) = I(F)$ para cualquier interpretación I.
  - Def.: Un conjunto de cláusulas S y un conjunto de fórmulas $\{F_1, \dots, F_n\}$ son equivalentes si, para cualquier interpretación I, $I(S) = 1$ syss I es un modelo de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
- De cláusulas a fórmulas
  - Prop.: La cláusula $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ es equivalente a la fórmula $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$.
  - Prop.: El conjunto de cláusulas $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$ es equivalente a la fórmula $(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m})$.

De fórmulas a cláusulas (forma clausal)

- Def.: Una forma clausal de una fórmula F es un conjunto de cláusulas equivalente a F.
- Prop.: Si $(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m})$ es una forma normal conjuntiva de la fórmula F. Entonces, una forma clausal de F es $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$.
- Ejemplos:
  - Una forma clausal de $\neg(p \wedge (q \to r))$ es $\{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg r\}\}$.
  - Una forma clausal de $p \to q$ es $\{\{\neg p, q\}\}$.
  - El conjunto $\{\{\neg p, q\}, \{r\}\}$ es una forma clausal de las fórmulas $(p \to q) \wedge r$ y $\neg\neg r \wedge (\neg q \to \neg p)$.
- Def.: Una forma clausal de un conjunto de fórmulas S es un conjunto de cláusulas equivalente a S.
- Prop.: Si $S_1, \dots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \dots, F_n$, entonces $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$.

5.1.4. Modelos, consistencia y consecuencia entre cláusulas

- Def.: Una interpretación I es modelo de un conjunto de cláusulas S si $I(S) = 1$.
- Ej.: La interpretación I tal que $I(p) = I(q) = 1$ es un modelo de $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$.
- Def.: Un conjunto de cláusulas es consistente si tiene modelos e inconsistente, en caso contrario.
- Ejemplos:
  - $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$ es consistente.
  - $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ es inconsistente.
- Prop.: Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
- Def.: $S \models C$ si para todo modelo I de S, $I(C) = 1$.

5.1.5. Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas

- Prop: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$.
  - $\{F_1, \dots, F_n\}$ es consistente syss $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es consistente.
  - Si S es una forma clausal de $\neg G$, entonces son equivalentes
    1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
    2. $\{F_1, \dots, F_n \neg G\}$ es inconsistente.
    3. $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.
- Ejemplo: $\{p \to q, q \to r\} \models p \to r$ syss
  $\{\{\neg p, q\}, \{\neg q, r\}, \{p\}, \{\neg r\}\}$ es inconsistente.

5.2. Demostraciones por resolución

5.2.1. Regla de resolución proposicional

- Reglas habituales:

Modus Ponens:	$\dfrac{p \to q, \quad p}{q}$	$\dfrac{\{\neg p, q\}, \quad \{p\}}{\{q\}}$
Modus Tollens:	$\dfrac{p \to q, \quad \neg q}{\neg p}$	$\dfrac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q\}}{\{\neg p\}}$
Encadenamiento:	$\dfrac{p \to q, \quad q \to r}{p \to r}$	$\dfrac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q, r\}}{\{\neg p, r\}}$

- Regla de resolución proposicional:
$$\frac{\{p_1,\dots,r,\dots,p_m\},\quad \{q_1,\dots,\neg r,\dots,q_n\}}{\{p_1,\dots,p_m,q_1,,\dots,q_n\}}$$

- Def.: Sean C_1 una cláusula, L un literal de C_1 y C_2 una cláusula que contiene el complementario de L. La resolvente de C_1 y C_2 respecto de L es
$$\mathrm{Res}_L(C_1,C_2) = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$$

- Ejemplos:
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_q(\{p,q\},\{\neg q,r\}) &&= \{p,r\}\\
&\mathrm{Res}_q(\{q,\neg p\},\{p,\neg q\}) &&= \{p,\neg p\}\\
&\mathrm{Res}_p(\{q,\neg p\},\{p,\neg q\}) &&= \{q,\neg q\}\\
&\mathrm{Res}_p(\{q,\neg p\},\{q,p\}) &&= \{q\}\\
&\mathrm{Res}_p(\{p\},\{\neg p\}) &&= \square
\end{aligned}$$

- Def.: $\mathrm{Res}(C_1,C_2)$ es el conjunto de las resolventes entre C_1 y C_2

- Ejemplos:
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}(\{\neg p,q\},\{p,\neg q\}) &&= \{\{p,\neg p\},\{q,\neg q\}\}\\
&\mathrm{Res}(\{\neg p,q\},\{p,q\}) &&= \{\{q\}\}\\
&\mathrm{Res}(\{\neg p,q\},\{q,r\}) &&= \emptyset
\end{aligned}$$

- Nota: $\square \not\in \mathrm{Res}(\{p,q\},\{\neg p,\neg q\})$

5.2.2. Demostraciones por resolución

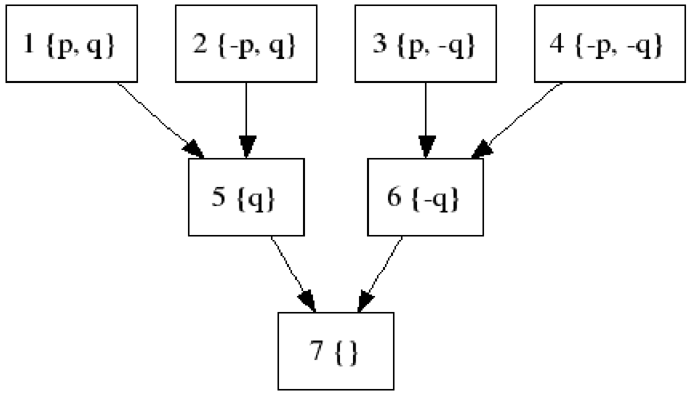
Ejemplo de refutación por resolución

- Refutación de $\{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,\neg q\}\}$:

1	$\{p,q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p,q\}$	Hipótesis
3	$\{p,\neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p,\neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	$\square$	Resolvente de 5 y 6

Ejemplo de grafo de refutación por resolución

- Grafo de refutación de $\{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,\neg q\}\}$:



Demostraciones por resolución entre cláusulas

Sea S un conjunto de cláusulas.

- La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una demostración por resolución de la cláusula C a partir de S si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
  - $C_i \in S$;
  - existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente de C_j y C_k
- La cláusula C es demostrable por resolución a partir de S si existe una demostración por resolución de C a partir de S. Se representa por $S \vdash_{Res} C$
- Una refutación por resolución de S es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de S.
- Se dice que S es refutable por resolución si existe una refutación por resolución a partir de S. Se representa por $S \vdash_{Res} \square$

Demostraciones por resolución entre fórmulas

- Def.: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y
  S una forma clausal de $\neg F$
  Una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ es una refutación por resolución de $S_1 \cup \cdots \cup S_n \cup S$.
- Def.: La fórmula F es demostrable por resolución a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ si existe una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$. Se representa por $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$.

- Ejemplo: $\{p \vee q, p \leftrightarrow q\} \vdash_{Res} p \wedge q$

1	$\{p, q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p, q\}$	Hipótesis
3	$\{p, \neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p, \neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	$\square$	Resolvente de 5 y 6

Adecuación y completitud de la resolución

- Prop.: Si C es una resolvente de C_1 y C_2, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
- Prop.: Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas.
  - (Adecuación) Si $S \vdash_{Res} \square$, entonces S es inconsistente.
  - (Completitud) Si S es inconsistente, entonces $S \vdash_{Res} \square$.
- Prop.: Sean S un conjunto de fórmulas y F es una fórmula.
  - (Adecuación) Si $S \vdash_{Res} F$, entonces $S \models F$.
  - (Completitud) Si $S \models F$, entonces $S \vdash_{Res} F$.
- Nota: Sean C_1 y C_2 las cláusulas $\{p\}$ y $\{p, q\}$, respectivamente. Entonces,
  - $\{C_1\} \models C_2$.
  - C_2 no es demostrable por resolución a partir de $\{C_1\}$.
  - La fórmula de forma clausal C_1 es $F_1 = p$.
  - La fórmula de forma clausal C_2 es $F_2 = p \vee q$.
  - $\{F_1\} \vdash_{Res} F_2$.

5.3. Algoritmos de resolución

5.3.1. Algoritmo de resolución por saturación

- Def.: Sea S un conjunto de cláusulas.
  $Res(S) = S \cup (\bigcup \{Res(C_1, C_2) : C_1, C_2 \in S\})$.
- Algoritmo de resolución por saturación

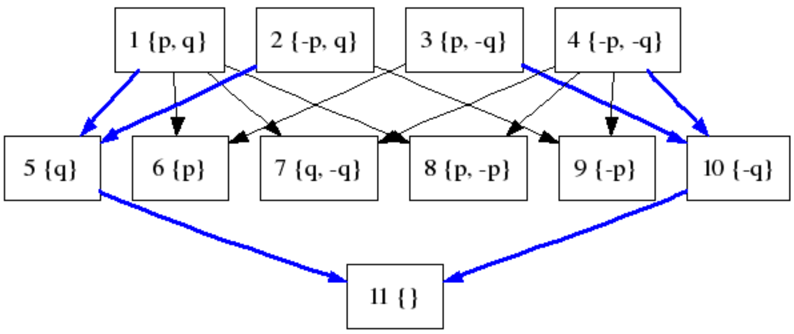
Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S.
Salida: *Consistente*, si S es consistente;
Inconsistente, en caso contrario.

$S' := \emptyset$
mientras $(\Box \notin S)$ y $(S \neq S')$ **hacer**
  $S' := S$
  $S := Res(S)$
fmientras
si $(\Box \in S)$ **entonces**
  Devolver *Inconsistente*
en caso contrario
  Devolver *Consistente*
fsi

- Prop.: El algoritmo de resolución por saturación es correcto.

Ejemplo de grafo de resolución por saturación

Grafo de $\{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,\neg q\}\}$:



Traza:

Paso	S	S'
0	$\{1,2,3,4\}$	$\emptyset$
1	$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$	$\{1,2,3,4\}$
2	$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$	$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

5.3.2. Algoritmo de saturación con simplificación

- Prop.: Si $S_1 \subseteq S_2$ y S_2 es consistente, entonces S_1 es consistente.
- Prop.: Una cláusula es una tautología syss contiene un literal y su complementario.
- Prop.: Sea $C \in S$ una tautología.
  Entonces S es consistente syss $S \setminus \{C\}$ es consistente.

- Def.: La cláusula C subsume a la cláusula D si $C \subset D$ (es decir, $C \subseteq D$ y $C \neq D$).
- Prop.: Si C subsume a D, entonces $C \models D$.
- Prop.: Sean $C, D \in S$ tales que C subsume a D.
  Entonces S es consistente syss $S \setminus \{D\}$ es consistente.
- Def.: El simplificado de un conjunto finito de cláusulas S es el conjunto obtenido de S suprimiendo las tautologías y las cláusulas subsumidas por otras; es decir,

$$\begin{array}{lll} Simp(S) = S - \{C \in S : & (C \text{ es una tautología}) \text{ ó} \\ & (\text{existe } D \in S \text{ tal que } D \subset C)\} \end{array}$$

Algoritmo de saturación con simplificación

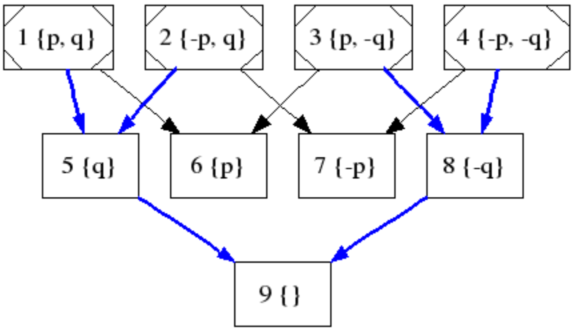
- Algoritmo de resolución por saturación con simplificación:
  Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S.
  Salida: *Consistente*, si S es consistente;
  Inconsistente, en caso contrario.

  $S' := \emptyset$
  mientras $(\square \notin S)$ y $(S \neq S')$ **hacer**
  $\quad S' := S$
  $\quad S := Simp(Res(S))$
  fmientras
  si $(\square \in S)$ **entonces**
  $\quad$ Devolver *Inconsistente*
  en caso contrario
  $\quad$ Devolver *Consistente*
  fsi

- Prop.: El algoritmo de resolución por saturación con simplificación es correcto.

Grafo de resolución por saturación con simplificación

Resolución de $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:

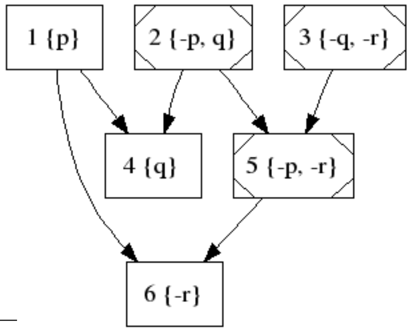


Traza:

Paso	S	S'
0	$\{1,2,3,4\}$	$\emptyset$
1	$\{5,6,7,8\}$	$\{1,2,3,4\}$
2	$\{9\}$	$\{5,6,7,8\}$

Grafo de resolución por saturación con simplificación

Resolución de $\{\{p\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q, \neg r\}\}$:



Traza:

Paso	S	S'
0	$\{1,2,3\}$	$\emptyset$
1	$\{1,3,4,5\}$	$\{1,2,3\}$
2	$\{1,4,6\}$	$\{1,3,4,5\}$
3	$\{1,4,6\}$	$\{1,4,5,6\}$

Modelo: $I(p) = 1, I(q) = 1, I(r) = 0$.

5.4. Refinamientos de resolución

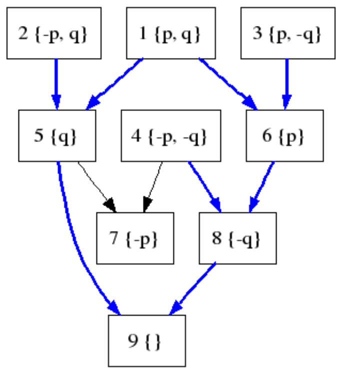
5.4.1. Resolución positiva

- Def.: Un literal positivo es un átomo.
- Def.: Una cláusula positiva es un conjunto de literales positivos.
- Def.: Una demostración por resolución positiva es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula positiva.

- La cláusula C es demostrable por resolución positiva a partir del conjunto de cláusulas S si existe una demostración por resolución positiva de C a partir de S. Se representa por $S \vdash_{ResPos} C$.
- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas.
  - (Adecuación) Si $S \vdash_{ResPos} \square$, entonces S es inconsistente.
  - (Completitud) Si S es inconsistente, entonces $S \vdash_{ResPos} \square$.

Grafo de resolución positiva

Grafo de $\{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,\neg q\}\}$:



Traza:

Paso	S	S'
0	$\{1,2,3,4\}$	$\emptyset$
1	$\{4,5,6\}$	$\{1,2,3,4\}$
2	$\{5,6,7,8\}$	$\{4,5,6\}$
3	$\{9\}$	$\{5,6,7,8\}$

5.4.2. Resolución negativa

- Def.: Un literal negativo es la negación de un átomo.
- Def.: Una cláusula negativa es un conjunto de literales negativos.
- Def.: Una demostración por resolución negativa es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula negativa.
- La cláusula C es demostrable por resolución negativa a partir del conjunto de cláusulas S si existe una demostración negativa por resolución de C a partir de S. Se representa por $S \vdash_{ResNeg} C$.
- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas.

- (Adecuación) Si $S \vdash_{ResNeg} \square$, entonces S es inconsistente.
- (Completitud) Si S es inconsistente, entonces $S \vdash_{ResNeg} \square$.

5.4.3. Resolución unitaria

- Def.: Una cláusula unitaria es un conjunto formado por un único literal.
- Def.: Una demostración por resolución unitaria es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula unitaria.
- La cláusula C es demostrable por resolución unitaria a partir del conjunto de cláusulas S si existe una demostración por resolución unitaria de C a partir de S. Se representa por $S \vdash_{ResUni} C$.
- Prop.: (Adecuación) Sea S un conjunto de cláusulas.
  Si $S \vdash_{ResUni} \square$, entonces S es inconsistente.
- Existen conjuntos de cláusulas S tales que S es inconsistente y $S \not\vdash_{ResUni} \square$.
  Dem.: $S = \{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,\neg q\}\}$
- Def.: Una cláusula de Horn es un conjunto de literales con un literal positivo como máximo.
- Ejemplos: $\{p,\neg q,\neg r\}$, $\{p\}$ y $\{\neg p,\neg q\}$ son cláusulas de Horn.
  $\{p,q,\neg r\}$ y $\{p,r\}$ no son cláusulas de Horn.
- Prop.: Si S es un conjunto inconsistente de cláusulas de Horn, entonces $S \vdash_{ResUni} \square$.

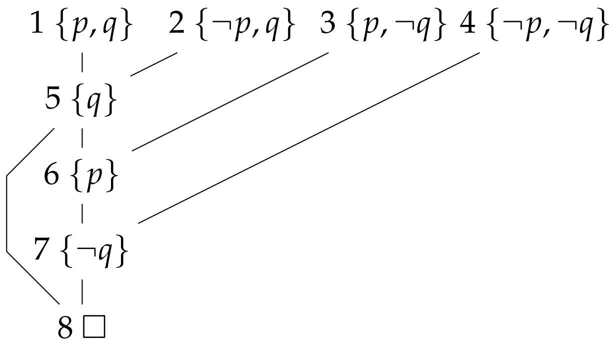
5.4.4. Resolución por entradas

- Def.: Una demostración por resolución por entradas a partir de S es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula de S.
- La cláusula C es demostrable por resolución por entradas a partir del conjunto de cláusulas S si existe una demostración por resolución por entradas de C a partir de S. Se representa por $S \vdash_{ResEnt} C$.
- Prop.: (Adecuación) Sea S un conjunto de cláusulas.
  Si $S \vdash_{ResEnt} \square$, entonces S es inconsistente.
- Existen conjuntos de cláusulas S tales que S es inconsistente y $S \not\vdash_{ResEnt} \square$.
  Dem.: $S = \{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,\neg q\}\}$
- Prop.: Si S es un conjunto inconsistente de cláusulas de Horn, entonces $S \vdash_{ResEnt} \square$.

5.4.5. Resolución lineal

- Sea S un conjunto de cláusulas.
  - La sucesión $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ es una resolución lineal a partir de S si se cumplen las siguientes condiciones:
    1. $C_0 \in S$;
    2. para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, existe un $B \in S \cup \{C_0, \dots, C_{i-1}\}$ tal que $C_i \in Res(C_{i-1}, B)$.

    La cláusula C_0 se llama cláusula base, las C_i se llaman cláusulas centrales y las B se llaman cláusulas laterales.
  - La cláusula C es deducible por resolución lineal a partir de S si existe una deducción por resolución lineal a partir de S, $(C_0, \dots, C_n)$, tal que $C_n = C$. Se representa por $S \vdash_{ResLin} C$.
- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas.
  - (Adecuación) Si $S \vdash_{ResLin} \square$, entonces S es inconsistente.
  - (Completitud) Si S es inconsistente, entonces $S \vdash_{ResLin} \square$.
- Ejemplo: Resolución lineal de $\{\{p,q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$



5.5. Argumentación por resolución

5.5.1. Formalización de argumentación por resolución

- Problema de los animales: Se sabe que
  1. Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.
  2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
  3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.

4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

- Formalización:

$$\begin{array}{l} \{ \text{tiene\_pelos} \lor \text{da\_leche} \to \text{es\_mamífero}, \\ \quad \text{es\_mamífero} \land (\text{tiene\_pezuñas} \lor \text{rumia}) \to \text{es\_ungulado}, \\ \quad \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_cuello\_largo} \to \text{es\_jirafa}, \\ \quad \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_rayas\_negras} \to \text{es\_cebra}, \\ \quad \text{tiene\_pelos} \land \text{tiene\_pezuñas} \land \text{tiene\_rayas\_negras} \} \\ \vdash_{Res} \text{es\_cebra} \end{array}$$

5.5.2. Decisión de argumentación por resolución

1	{¬ tiene_pelos, es_mamífero}	Hipótesis
2	{¬ da_leche, es_mamífero}	Hipótesis
3	{¬es_mamífero, ¬tiene_pezuñas, es_ungulado}	Hipótesis
4	{¬es_mamífero, ¬rumia, es_ungulado}	Hipótesis
5	{¬es_ungulado, ¬tiene_cuello_largo, es_jirafa}	Hipótesis
6	{¬es_ungulado, ¬tiene_rayas_negras, es_cebra}	Hipótesis
7	{tiene_pelos}	Hipótesis
8	{tiene_pezuñas}	Hipótesis
9	{tiene_rayas_negras}	Hipótesis
10	{¬es_cebra}	Hipótesis
11	{es_mamífero}	Resolvente de 1 y 7
12	{¬tiene_pezuñas, es_ungulado}	Resolvente de 11 y 3
13	{es_ungulado}	Resolvente de 12 y 8
14	{¬tiene_rayas_negras, es_cebra}	Resolvente de 13 y 6
15	{es_cebra}	Resolvente de 14 y 9
16	$\square$	Resolvente de 15 y 10

Bibliografía

1. M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.).* (Springer, 2001).

   Cap. 4: Propositional calculus: resolution and BDDs.

2. C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving* (Academic Press, 1973).

   Cap. 5.2: The resolution principle for the proposicional logic.

3. N.J. Nilsson *Inteligencia artificial (Una nueva síntesis)* (McGraw–Hill, 2001).

   Cap. 14: La resolución en el cálculo proposicional.

4. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003).

   Cap. 5.7: El principio de resolución en lógica proposicional.

5. U. Schöning *Logic for Computer Scientists* (Birkäuser, 1989).

   Cap. 1.5: Resolution.

* Capítulo de Ben-Ari.

Tema 6

Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

Contenido

6.1. Representación del conocimiento en lógica de primer orden 61

6.1.1. Representación de conocimiento geográfico 61

6.1.2. Representación del mundo de los bloques 62

6.1.3. Representación de conocimiento astronómico 63

6.2. Sintaxis de la lógica de primer orden 64

6.2.1. Lenguaje de primer orden 64

6.2.2. Términos y fórmulas de primer orden 66

6.2.3. Subfórmulas 67

6.2.4. Variables libres y ligadas 69

6.3. Semántica de la lógica de primer orden 70

6.3.1. Estructuras, asignaciones e interpretaciones 70

6.3.2. Evaluación de términos y fórmulas 72

6.3.3. Modelo, satisfacibilidad y validez de fórmulas 75

6.3.4. Modelo y consistencia de conjuntos de fórmulas 77

6.3.5. Consecuencia lógica 78

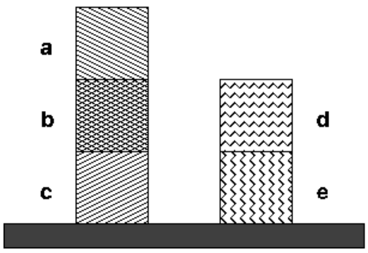
6.3.6. Equivalencia lógica 79

6.1. Representación del conocimiento en lógica de primer orden

6.1.1. Representación de conocimiento geográfico

- Ejemplo 1: *Si Sevilla es vecina de Cádiz, entonces Cádiz es vecina de Sevilla. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla*
  - Representación en lógica proposicional:
    $\{SvC \to CvS, \quad SvC\} \models CvS$
- Ejemplo 2: *Si una ciudad es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla*
  - Representación en lógica proposicional: Imposible
  - Representación en lógica de primer orden:
    $\{\forall x\ \forall y\ [vecina(x,y) \to vecina(y,x)], \quad vecina(Sevilla, Cadiz)\}$
    $\models vecina(Cadiz, Sevilla)$

6.1.2. Representación del mundo de los bloques



- Simbolización:
  - sobre(x,y) se verifica si el bloque x está colocado sobre el bloque y
  - sobre_mesa(x) se verifica si el bloque x está sobre la mesa
- Situación del ejemplo:
  sobre(a,b), sobre(b,c), sobre_mesa(c), sobre(d,e), sobre_mesa(e)
- Definiciones:
  - bajo(x,y) se verifica si el bloque x está debajo del bloque y
    $\forall x\ \forall y$ [bajo$(x,y) \leftrightarrow$ sobre(y,x)]

- encima(x, y) se verifica si el bloque x está encima del bloque y pudiendo haber otros bloques entre ellos
  $\forall x\ \forall y\ [\ \text{encima}(x, y) \leftrightarrow$
  $\text{sobre}(x, y) \lor \exists z\ [\text{sobre}(x, z) \land \text{encima}(z, y)]]$
- libre(x) se verifica si el bloque x no tiene bloques encima
  $\forall x\ [\text{libre}(x) \leftrightarrow \neg\exists y\ \ \text{sobre}(y, x)]$
- pila(x, y, z) se verifica si el bloque x está sobre el y, el y sobre el z y el z sobre la mesa
  $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\ \text{pila}(x, y, z) \leftrightarrow$
  $\text{sobre}(x, y) \land \text{sobre}(y, z) \land \text{sobre\_mesa}(z)]$

- Propiedades:
  - Si z, y, z es una pila entonces y no está libre
    $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\text{pila}(x, y, z) \rightarrow \neg\, \text{libre}(y)]$

Representación del mundo de los bloques con funciones e igualdad

- Simbolización:
  - es_bloque(x) se verifica si x es un bloque.
  - superior(x) es el bloque que está sobre el bloque x.
- Situación del ejemplo:
  - es_bloque(a), es_bloque(b), es_bloque(c), es_bloque(d), es_bloque(e)
  - $\text{superior}(b) = a, \text{superior}(c) = b, \text{superior}(e) = d$
- Definiciones:
  - sobre_mesa(x) se verifica si el bloque x está sobre la mesa
    $\forall x\ [\text{sobre\_mesa}(x) \leftrightarrow \text{es\_bloque}(x) \land \neg\exists y\ \ \text{superior}(y) = x]$
  - libre(x) se verifica si el bloque x no tiene bloques encima
    $\forall x\ [\text{libre}(x) \leftrightarrow \neg\exists y\ \ \text{superior}(x) = y]$
  - tope(x) es el bloque libre que está encima de x
    $\forall x\ [\ (\text{libre}(x) \rightarrow \text{tope}(x) = x) \land$
    $(\neg\, \text{libre}(x) \rightarrow \text{tope}(x) = \text{tope}(\text{superior}(x)))]$

6.1.3. Representación de conocimiento astronómico

- *La Tierra es un planeta:*
  $\text{planeta}(\text{Tierra})$
- *La Luna no es un planeta:*
  $\neg\,\text{planeta}(\text{Luna})$
- *La Luna es un satélite:*
  $\text{satélite}(\text{Luna})$
- *La Tierra gira alrededor del Sol:*
  $\text{gira}(\text{Tierra}, \text{Sol})$
- *Todo planeta es un satélite:*
  $\forall x\ [\text{planeta}(x) \to \text{satélite}(x)]$
- *Todo planeta gira alrededor del Sol:*
  $\forall x\ [\text{planeta}(x) \to \text{gira}(x, \text{Sol})]$
- *Algún planeta gira alrededor de la Luna:*
  $\exists x\ [\text{planeta}(x) \land \text{gira}(x, \text{Luna})]$
- *Hay por lo menos un satélite:*
  $\exists x\ \text{satélite}(x)$
- *Ningún planeta es un satélite:*
  $\neg\exists x\ [\text{planeta}(x) \land \text{satélite}(x)]$
- *Ningún objeto celeste gira alrededor de sí mismo:*
  $\neg\exists x\ \ \text{gira}(x, x)$
- *Alrededor de los satélites no giran objetos:*
  $\forall x\ [\text{satélite}(x) \to \neg\exists y\ \ \text{gira}(y, x)]$
- *Hay exactamente un satélite:*
  $\exists x\ [\text{satélite}(x) \land \forall y\ [\text{satélite}(y) \to x = y]]$
- *La Luna es un satélite de la Tierra:*
  $\text{satélite}(\text{Luna}, \text{Tierra})$
- *Todo planeta tiene un satélite:*
  $\forall x\ [\text{planeta}(x) \to \exists y\ \text{satélite}(y, x)]$
- *La Tierra no tiene satélites:*
  $\neg\exists x\ \text{satélite}(x, \text{Tierra})$

- *Algún planeta no tiene satélites:*
  $\exists x\ [\text{planeta}(x) \land \neg \exists y\ \text{satélite}(y, x)]$
- *Sólo los planetas tienen satélites:*
  $\forall x\ [\exists y\ \text{satélite}(y, x) \to \text{planeta}(x)]$
- *Todo satélite es satélite de algún planeta:*
  $\forall x\ [\text{satélite}(x) \to \exists y\ (\text{planeta}(y) \land \text{satélite}(x, y))]$
- *La Luna no gira alrededor de dos planetas diferentes:*
  $\neg \exists x\ \exists y\ [\ \text{planeta}(x) \land \text{planeta}(y) \land$
  $\text{gira}(\text{Luna}, x) \land \text{gira}(\text{Luna}, y) \land x \neq y]$
- *Hay exactamente dos planetas:*
  $\exists x\ \exists y\ [\ \text{planeta}(x) \land \text{planeta}(y) \land x \neq y \land$
  $\forall z\ [\text{planeta}(z) \to z = x \lor z = y]]$

6.2. Sintaxis de la lógica de primer orden

6.2.1. Lenguaje de primer orden

Lenguaje de primer orden

- Símbolos lógicos:
  - Variables: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$.
  - Conectivas: $\neg, \land, \lor, \to, \leftrightarrow$.
  - Cuantificadores: $\forall, \exists$.
  - Símbolo de igualdad: $=$.
- Símbolos propios:
  - Símbolos de constantes: $a, b, c, \dots, a_1, a_2, \dots$.
  - Símbolos de predicado (con aridad): $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$.
  - Símbolos de función (con aridad): $f, g, h, \dots, f_1, f_2, \dots$.
- Símbolos auxiliares: "(", ")", ",".
- Notación:
  - $L, L_1, L_2, \dots$ representan lenguajes de primer orden.
  - Var representa el conjunto de las variables.
- Los símbolos de predicados de aridad mayor que 1 se llaman de relaciones.

Ejemplos de lenguajes de primer orden

- Lenguaje del mundo de los bloques:
  - Símbolos de constantes: a, b, c, d, e
  - Símbolos de predicado (y de relación):
    – de aridad 1: sobre_mesa, libre, es_bloque
    – de aridad 2: sobre, bajo, encima
    – de aridad 3: pila
  - Símbolos de función (de aridad 1): superior, tope
- Lenguaje de la aritmética:
  - Símbolos de constantes: $0, 1$
  - Símbolos de función:
    – monaria: s (siguiente)
    – binarias: $+, \cdot$
  - Símbolo de predicado binario: $<$

6.2.2. Términos y fórmulas de primer orden

Términos

- Def. de término de un lenguaje de primer orden L:
  - Las variables son términos de L.
  - Las constantes de L son términos de L.
  - Si f es un símbolo de función n–aria de L y $t_1, \dots, t_n$ son términos de L, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término de L.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la aritmética,
    - $+(\cdot(x, 1), s(y))$ es un término, que se suele escribir como $(x \cdot 1) + s(y)$
    - $+(\cdot(x, <), s(y))$ no es un término
  - En el lenguaje del mundo de los bloques,
    - superior(superior(c)) es un término.
    - libre(superior(c)) no es un término.
- Notación:
  - $s, t, t_1, t_2, \dots$ representan términos.
  - Térm(L) representa el conjunto de los términos de L

Fórmulas atómicas

- Def. de fórmula atómica de un lenguaje de primer orden L:
  - Si t_1 y t_2 son términos de L, entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula atómica de L.
  - Si P es un símbolo de relación n–aria de L y $t_1, \dots, t_n$ son términos de L, entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula atómica de L.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la aritmética,
    - $< (\cdot(x,1), s(y))$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x \cdot 1 < s(y)$
    - $+(x,y) = \cdot(x,y)$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x + y = x \cdot y$
  - En el lenguaje del mundo de los bloques,
    - $\text{libre}(\text{superior}(c))$ es una fórmula atómica.
    - $\text{tope}(c) = \text{superior}(b)$ es una fórmula atómica.
- Notación:
  - $A, B, A_1, A_2, \dots$ representan fórmulas atómicas.
  - $\text{Atóm}(L)$ representa el conjunto de las fórmulas atómicas de L.

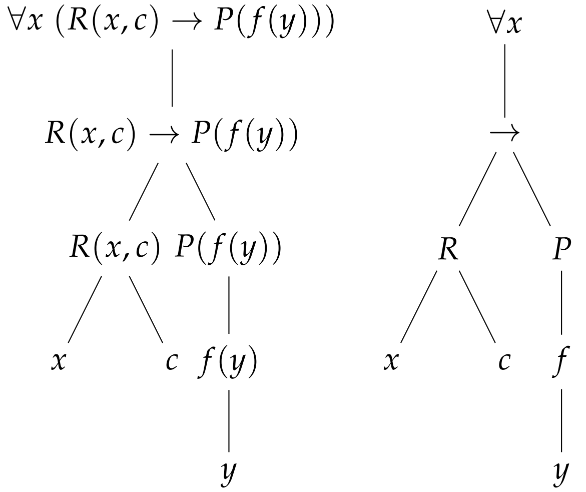
Fórmulas

- Definición de las fórmulas de L:
  - Las fórmulas atómicas de L son fórmulas de L.
  - Si F y G son fórmulas de L, entonces $\neg F$, $(F \land G)$, $(F \lor G)$, $(F \to G)$ y $(F \leftrightarrow G)$ son fórmulas de L.
  - Si F es una fórmula de L, entonces $\forall x\ F$ y $\exists x\ F$ son fórmulas de L.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la aritmética,
    - $\forall x\ \exists y\ < (x,y)$ es una fórmula que se escribe como $\forall x\ \exists y\ x < y$
    - $\forall x\ \exists y\ + (x,y)$ no es una fórmula.
  - En el lenguaje del mundo de los bloques,
    - $\forall x\ (\text{tope}(x) = x \leftrightarrow \text{libre}(x))$ es una fórmula.

- Notación:
  - $F, G, H, F_1, F_2, \ldots$ representan fórmulas.
  - $\text{Fórm}(L)$ representa el conjunto de las fórmulas de L.

6.2.3. Subfórmulas

Árboles de análisis (o de formación)



Subfórmulas

- Def: El conjunto $\text{Subf}(F)$ de las subfórmulas de una fórmula F se define recursivamente por:

$$\text{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es una fórmula atómica;} \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \neg G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G) \cup \text{Subf}(H), & \text{si } F = G * H; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \forall x\ G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \exists x\ G \end{cases}$$

- Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Subf}(\forall x\ (R(x,c) \to P(f(y)))) = \{\ & \forall x\ (R(x,c) \to P(f(y))), \\ & (R(x,c) \to P(f(y))), \\ & R(x,c), \\ & P(f(y))\} \end{aligned}$$

Criterios de reducción de paréntesis

- Pueden eliminarse los paréntesis externos.
  $F \wedge G$ es una abreviatura de $(F \wedge G)$

- Precedencia de asociación de conectivas y cuantificadores: $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
  $\forall x\ P(x) \rightarrow Q(x)$ es una abreviatura de $(\forall x\ P(x)) \rightarrow Q(x)$

- Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha.

$F \vee G \vee H$	es una abreviatura de	$(F \vee (G \vee H))$
$F \wedge G \wedge H \rightarrow \neg F \vee G$	es una abreviatura de	$((F \wedge (G \wedge H)) \rightarrow (\neg F \vee G))$

- Los símbolos binarios pueden escribirse en notación infija.

$x + y$	es una abreviatura de	$+(x, y)$
$x < y$	es una abreviatura de	$< (x, y)$

6.2.4. Variables libres y ligadas

Conjuntos de variables

- Def.: El conjunto de las variables del término t es

$$V(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } t \text{ es una constante;} \\ \{x\}, & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ V(t_1) \cup \cdots \cup V(t_n), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- Def.: El conjunto de las variables de la fórmula F es

$$V(F) = \begin{cases} V(t_1) \cup V(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ V(t_1) \cup \cdots \cup V(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n); \\ V(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ V(G) \cup V(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ V(G), & \text{si } F \text{ es } \forall x\ G; \\ V(G), & \text{si } F \text{ es } \exists x\ G \end{cases}$$

- Ejemplos:
  - El conjunto de las variables de $\forall x\ (R(x, c) \rightarrow P(f(y)))$ es $\{x, y\}$.
  - El conjunto de las variables de $\forall x\ (R(a, c) \rightarrow P(f(y)))$ es $\{y\}$.

Apariciones libres y ligadas

- Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable x en la fórmula F es ligada si es en una subfórmula de F de la forma $\forall x\ G$ ó $\exists x\ G$.

- Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable x en la fórmula F es libre si no es ligada.
- Ejemplo: Las apariciones ligadas son las subrayadas:
  $\forall x\ (P(\underline{x}) \to R(\underline{x}, y)) \to (\exists y\ P(\underline{y}) \to R(z, x))$
  $\exists x\ R(\underline{x}, y) \lor \forall y\ P(\underline{y})$
  $\forall x\ (P(\underline{x}) \to \exists y\ R(\underline{x}, \underline{y}))$
  $P(x) \to R(x, y)$

Variables libres y ligadas

- La variable x es libre en F si tiene una aparición libre en F.
- La variable x es ligada en F si tiene una aparición ligada en F.
- El conjunto de las variables libres de una fórmula F es:

$$\mathrm{VL}(F) = \begin{cases} \mathrm{V}(t_1) \cup \mathrm{V}(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ \mathrm{V}(t_1) \cup \dots \cup \mathrm{V}(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n); \\ \mathrm{VL}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \mathrm{VL}(G) \cup \mathrm{VL}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ \mathrm{VL}(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } \forall x\ G; \\ \mathrm{VL}(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } \exists x\ G \end{cases}$$

- Ejemplo:

Fórmula	Ligadas	Libres
$\forall x\ (P(x) \to R(x, y)) \to (\exists y\ P(y) \to R(x, z))$	x, y	x, y, z
$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ R(x, y))$	x, y	
$\forall z\ (P(x) \to R(x, y))$		x, y

Fórmulas cerradas y abiertas

- Fórmula cerradas:
  - Def.: Una fórmula cerrada (o sentencia) es una fórmula sin variables libres.
  - Ejemplos: $\forall x\ (P(x) \to \exists y\ R(x, y))$ es cerrada.
    $\exists x\ R(x, y) \lor \forall y\ P(y)$ no es cerrada.
- Fórmulas abiertas:
  - Def.: Una fórmula abierta es una fórmula con variables libres.
  - Ejemplos: $\forall x\ (P(x) \to \exists y\ R(x, y))$ no es abierta.
    $\exists x\ R(x, y) \lor \forall y\ P(y)$ es abierta.

6.3. Semántica de la lógica de primer orden

6.3.1. Estructuras, asignaciones e interpretaciones

Estructuras, asignaciones e interpretaciones

- Una estructura del lenguaje L es un par $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que:
  - U es un conjunto no vacío, denominado universo de la estructura;
  - I es una función con dominio el conjunto de símbolos propios de L tal que
    - si c es una constante de L, entonces $I(c) \in U$;
    - si f es un símbolo de función n–aria de L, entonces $I(f) : U^n \to U$;
    - si P es un símbolo de relación 0–aria de L, entonces $I(P) \in \{1, 0\}$;
    - si R es un símbolo de relación n–aria ($n > 0$) de L, entonces $I(R) \subseteq U^n$;
- Una asignación A en una estructura (U, I) es una función $A : \text{Var} \to U$ que hace corresponder a cada variable del alfabeto un elemento del universo de la estructura.
- Una interpretación de L es un par $(\mathcal{I}, A)$ formado por una estructura $\mathcal{I}$ de L y una asignación A en $\mathcal{I}$.
- Notación: A veces se usa para los valores de verdad V y F en lugar de 1 y 0.

Ejemplos de estructuras

Sea L el lenguaje de la aritmética cuyos símbolos propios son:
constante: 0;
símbolo de función monaria: s;
símbolo de función binaria: $+$ y
símbolo de relación binaria: $\leq$

- Primera estructura de L:
  $U_1 = \mathbb{N}$
  $I_1(0) = 0$
  $I_1(s) = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ (sucesor)
  $I_1(+) = \{(a, b, a+b) : a, b \in \mathbb{N}\}$ (suma)
  $I_1(\leq) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$ (menor o igual)
- Segunda estructura de L:
  $U_2 = \{0, 1\}^*$ (cadenas de 0 y 1)
  $I_2(0) = \epsilon$ (cadena vacía)
  $I_2(s) = \{(w, w1) : w \in \{0, 1\}^*\}$ (siguiente)

$I_2(+) = \{(w_1, w_2, w_1w_2) : w_1, w_2 \in \{0,1\}^*\}$ (concatenación)
$I_2(\leq) = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \{0,1\}^*, w_1$ es prefijo de $w_2\}$ (prefijo)

- Tercera estructura de L:
  $U_3 = \{abierto, cerrado\}$
  $I_3(0) = cerrado$
  $I_3(s) = \{(abierto, cerrado), (cerrado, abierto)\}$
  $I_3(+) = \{\ (abierto, abierto, abierto), (abierto, cerrado, abierto),$
  $(cerrado, abierto, abierto), (cerrado, cerrado, cerrado)\}$
  $I_3(\leq) = \{\ (abierto, abierto), (cerrado, abierto), (cerrado, cerrado)\}$

e	$I_3(s)(e)$
abierto	*cerrado*
cerrado	*abierto*

$I_3(+)$	*abierto*	*cerrado*
abierto	*abierto*	*abierto*
cerrado	*abierto*	*cerrado*

$I_3(\leq)$	*abierto*	*cerrado*
abierto	1	0
cerrado	1	1

6.3.2. Evaluación de términos y fórmulas

Ejemplo de evaluación de términos

- Sean L el lenguaje de la página 71 y t el término $s(x + s(0))$.
  - Si $\mathcal{I}$ es la primera estructura y $A(x) = 3$, entonces
    $$\begin{aligned} \mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(x+s(0))) &&= s^I(3 +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(3 +^I s^I(0)) &&= s^I(3 +^I 1) = \\ &= s^I(4) &&= 5 \end{aligned}$$
  - Si $\mathcal{I}$ es la segunda estructura y $A(x) = 10$, entonces
    $$\begin{aligned} \mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(x+s(0))) &&= s^I(10 +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(10 +^I s^I(\epsilon)) &&= s^I(10 +^I 1) = \\ &= s^I(101) &&= 1011 \end{aligned}$$
  - Si $\mathcal{I}$ es la tercera estructura y $A(x) = abierto$, entonces
    $$\begin{aligned} \mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(x+s(0))) &&= s^I(abierto +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(abierto +^I s^I(cerrado)) &&= s^I(abierto +^I abierto) = \\ &= s^I(abierto) &&= cerrado \end{aligned}$$

Evaluación de términos

- Def.: Dada una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de L y una asignación A en $\mathcal{I}$, se define la función de evaluación de términos $\mathcal{I}_A : \text{Térm}(L) \to U$ por

$$\mathcal{I}_A(t) = \begin{cases} I(c), & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ A(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ I(f)(\mathcal{I}_A(t_1),\dots,\mathcal{I}_A(t_n)), & \text{si } t \text{ es } f(t_1,\dots,t_n) \end{cases}$$

- $\mathcal{I}_A(t)$ se lee "el valor de t en $\mathcal{I}$ respecto de A".
- Ejemplo: Sean L el lenguaje de la página 71, t el término $s(+(x,s(0)))$, $\mathcal{I}$ la primera estructura y $A(x) = 3$.

$$\begin{array}{llll} \mathcal{I}_A(t) & = \mathcal{I}_A(s(+(x,s(0)))) & & = I(s)(\mathcal{I}_A(+(x,s(0)))) = \\ & = I(s)(I(+)(\mathcal{I}_A(x),\mathcal{I}_A(s(0)))) & & = I(s)(I(+)(A(x),\mathcal{I}_A(s(0)))) = \\ & = I(s)(I(+)(3,I(s)(\mathcal{I}_A(0)))) & & = I(s)(I(+)(3,I(s)(I(0)))) = \\ & = I(s)(I(+)(3,I(s)(0))) & & = I(s)(I(+)(3,1)) = \\ & = I(s)(4) & & = 5 \end{array}$$

Evaluación de fórmulas

- Def.: Dada una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de L y una asignación A sobre $\mathcal{I}$, se define la función de evaluación de fórmulas $\mathcal{I}_A : \text{Fórm}(L) \to \mathbb{B}$ por
  - Si F es $t_1 = t_2$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_=(\mathcal{I}_A(t_1), I_A(t_2))$
  - Si F es $P(t_1,\dots,t_n)$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_{I(P)}(\mathcal{I}_A(t_1),\dots,\mathcal{I}_A(t_n))$
  - Si F es $\neg G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_\neg(\mathcal{I}_A(G))$
  - Si F es $G * H$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_*(\mathcal{I}_A(G),\mathcal{I}_A(H))$
  - Si F es $\forall x\ G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si para todo } u \in U \text{ se tiene} \\ & \mathcal{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
  - Si F es $\exists x\ G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si existe algún } u \in U \text{ tal que} \\ & \mathcal{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- $\mathcal{I}_A(F)$ se lee "el valor de F en $\mathcal{I}$ respecto de A".

Conceptos auxilares para la evaluación de fórmulas

- La función de verdad de la igualdad en U es la función $H_= : U^2 \to \mathbb{B}$ definida por

$$H_=(u_1,u_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } u_1 = u_2; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Función de verdad de una relación: Si R es una relación n–aria en U (i.e. $R \subseteq U^n$), entonces la función de verdad de R es la función $H_R : U^n \to \mathbb{B}$ definida por

$$H_R(u_1,\dots,u_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } (u_1,\dots,u_n) \in R; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Variante de una asignación: Sea A una asignación en la estructura (U, I) y $u \in U$. Mediante $A[x/u]$ se representa la asignación definida por
$$A[x/u](y) = \begin{cases} u, & \text{si } y \text{ es } x; \\ A(y) & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

Ejemplo de evaluación de fórmula

Evaluación de $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$

$$\mathcal{I}_A(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) = \mathsf{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = \mathsf{V} \end{array}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = \mathsf{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) = \mathsf{V} \text{ ó} \\ \mathcal{I}_{A[x/1,y/2]}P(x,y) = \mathsf{V} \end{array}$$

$\mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) = P^I(1,1) = \mathsf{V}$
Luego, $\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = \mathsf{V}$.

$$\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = \mathsf{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/2,y/1]}P(x,y) = \mathsf{V} \text{ ó} \\ \mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) = \mathsf{V} \end{array}$$

$\mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) = P^I(2,2) = \mathsf{V}$
Luego, $\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = \mathsf{V}$.
Por tanto, $\mathcal{I}_A(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) = \mathsf{V}$

Ejemplo de evaluación de fórmulas

Evaluación de $\forall x\ g(g(x)) = x$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1, 2\}$ e $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

$$\mathcal{I}_A(\forall x\ g(g(x)) = x) = \mathsf{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1]}g(g(x)) = x = \mathsf{V} \text{ y} \\ \mathcal{I}_{A[x/2]}g(g(x)) = x = \mathsf{V} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) &= (g^I(g^I(1)) = 1) \\ &= (g^I(2) = 1) \\ &= (1 = 1) \\ &= \mathsf{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) &= (g^I(g^I(2)) = 2) \\ &= (g^I(1) = 2) \\ &= (2 = 2) \\ &= \mathsf{V} \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}_A(\forall x\ g(g(x)) = x) = \mathsf{V}$.

Dependencias en la evaluación de fórmulas

- Ejemplo de dependencia del universo: Sea G la fórmula $\forall x\ \exists y\ R(y,x)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) = \mathsf{V}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, I), I(R) = <$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
  - $\mathcal{I}_A(G) = \mathsf{F}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = <$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la estructura: Sea G la fórmula $\exists x\ \forall y\ R(x,y)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) = \mathsf{V}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
  - $\mathcal{I}_A(G) = \mathsf{F}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \geq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la asignación: Sea G la fórmula $\forall y\ R(x,y)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) = \mathsf{V}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 0$.
  - $\mathcal{I}_A(G) = \mathsf{F}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 5$.

Evaluación y variables libres

- Sea t un término de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
  - Si A y B son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables de t, entonces $\mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_B(t)$.
  - Si t no tiene variables, entonces $\mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_B(t)$ para cualesquiera asignaciones A y B en $\mathcal{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathcal{I}(t)$.
- Sea F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
  - Si A y B son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables libres de F, entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$.
  - Si F es cerrada, entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$ para cualesquiera asignaciones A y B en $\mathcal{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathcal{I}(F)$.

6.3.3. Modelo, satisfacibilidad y validez de fórmulas

Modelo de una fórmula

- Sean F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
  - $(\mathcal{I}, A)$ es una realización de F si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}_A(F) = 1$. Se representa por $\mathcal{I}_A \models F$.
  - $\mathcal{I}$ es un modelo de F si, para todo asignación A en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A(F) = 1$. Se representa por $\mathcal{I} \models F$.

- Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(f) = +$ e $I(g) = *$.
  - Si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = A(y) = 2$. Entonces
    $\mathcal{I}_A \models f(x,y) = g(x,y)$,
  - Si B es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $B(x) = 1, B(y) = 2$. Entonces
    $\mathcal{I}_B \not\models f(x,y) = g(x,y)$,
  - $\mathcal{I} \not\models f(x,y) = g(x,y)$
  - $\mathcal{I} \models f(x,y) = f(y,x)$

Satisfacibilidad y validez

- Def.: Sea F una fórmula de L.
  - F es válida si toda estructura de L es modelo de F,
    (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$).
    Se representa por $\models F$.
  - F es satisfacible si tiene alguna realización
    (i.e. existe alguna estructura $\mathcal{I}$ de L y alguna asignación A en I tales que $\mathcal{I}_A(F) = 1$).
  - F es insatisfacible si no tiene ninguna realización
    (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en I se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 0$).

- Ejemplos:
  - $\exists x\ P(x) \lor \forall x\ \neg P(x)$ es válida.
  - $\exists x\ P(x) \land \exists x\ \neg P(x)$ es satisfacible, pero no es válida.
  - $\forall x\ P(x) \land \exists x\ \neg P(x)$ es insatisfacible.

- F es válida syss $\neg F$ es insatisfacible.
  F es válida
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(\neg F) = 0$
  $\iff$ $\neg F$ es insatisfacible.

- Si F es válida, entonces F es satisfacible.
  F es válida
  $\Longrightarrow$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$
  $\Longrightarrow$ existe una estructura $\mathcal{I}$ y una asignación A tales que $\mathcal{I}_A(F) = 1$
  $\Longrightarrow$ F es satisfacible.

- F es satisfacible $\not\Longrightarrow$ $\neg F$ es insatisfacible.
  $\forall x\ P(x)$ y $\neg\forall x\ P(x)$ son satisfacibles.
- Sea F una fórmula de L y $x_1, \dots, x_n$ las variables libres de F.
  - F es válida syss $\forall x_1 \dots \forall x_n\ F$ es válida.
    [$\forall x_1 \dots \forall x_n\ F$ es el cierre universal de F].
  - F es satisfacible syss $\exists x_1 \dots \exists x_n\ F$ es satisfacible.
    [$\exists x_1 \dots \exists x_n\ F$ es el cierre existencial de F].

6.3.4. Modelo y consistencia de conjuntos de fórmulas

Modelo de un conjunto de fórmulas

- Notación: $S, S_1, S_2, \dots$ representarán conjuntos de fórmulas.
- Def.: Sean S un conjunto de fórmulas de L, $\mathcal{I}$ una estructura de L y A una asignación en $\mathcal{I}$.
  - $(\mathcal{I}, A)$ es una realización de S si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que para toda $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$. Se representa por $\mathcal{I}_A \models S$.
  - $\mathcal{I}$ es un modelo de S si para toda $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I} \models F$
    (i.e. para toda $F \in S$ y toda asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_A(F) = 1$). Se representa por $\mathcal{I} \models S$.
- Ejemplo: Sea $S = \{\forall y\ R(x,y),\ \forall y\ f(x,y) = y\}$.
  - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $R^I = \leq$, $f^I = +$, $A(x) = 0$ es realización de S.
  - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $R^I = <$, $f^I = +$, $A(x) = 0$ no es realización de S.
- Ejemplo: Sea $S = \{R(e,y),\ f(e,y) = y\}$.
  - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = \leq$, $f^I = +$, $e^I = 0$ es modelo de S.
  - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = <$, $f^I = +$, $e^I = 0$ no es modelo de S.

Consistencia de un conjunto de fórmulas

- Def.: Sea S un conjunto de fórmulas de L.
  - S es consistente si S tiene alguna realización
    (i.e. existe alguna estructura $\mathcal{I}$ de L y alguna asignación A en $\mathcal{I}$ tales que, para toda $F \in S$, $I_A(F) = 1$).

- S es inconsistente si S no tiene ninguna realización
  (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$, existe alguna $F \in S$, tal que $I_A(F) = 0$).

- Ejemplos:
  - $S = \{\forall y\ R(x,y),\ \forall y\ f(x,y) = y\}$ es consistente.
    $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$ es realización de S.
  - $S = \{P(x) \to Q(x),\ \forall y\ P(y),\ \neg Q(x)\}$ es inconsistente.

- Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas *cerradas* de L. Entonces S es consistente syss S tiene algún modelo.

6.3.5. Consecuencia lógica

Consecuencia lógica

- Def.: Sean F una fórmula de L y S un conjunto de fórmulas de L.
  - F es consecuencia lógica de S si todas las realizaciones de S lo son de F.
    (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
    si $\mathcal{I}_A \models S$ entonces $\mathcal{I}_A \models F$).
    Se representa por $S \models F$.
  - Se escribe $G \models F$ en lugar de $\{G\} \models F$.
  - Se escribe $G \not\models F$ en lugar de $\{G\} \not\models F$.

- Ejemplos:
  - $\forall x\ P(x) \models P(y)$
  - $P(y) \not\models \forall x\ P(x)$
    $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \{1,2\}, P^I = \{1\}, A(y) = 1$.
  - $\{\forall x\ (P(x) \to Q(x)),\ P(c)\} \models Q(c)$
  - $\{\forall x\ (P(x) \to Q(x)),\ Q(c)\} \not\models P(c)$
    $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \{1,2\}, c^I = 1, P^I = \{2\}, Q^I = \{1,2\}$.
  - $\{\forall x\ (P(x) \to Q(x)),\ \neg Q(c)\} \models \neg P(c)$
  - $\{P(c),\ \neg P(d)\} \models c \neq d$

Consecuencia lógica e inconsistencia

- $S \models F$ syss $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.
  $S \models F$
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
  si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
  si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(\neg F) = 0$.
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
  existe alguna $H \in S \cup \{\neg F\}$ tal que $\mathcal{I}_A(H) = 0$.
  $\iff$ $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.
- Sean F una fórmula *cerrada* de L y S un conjunto de fórmulas *cerradas* de L. Entonces, son equivalentes
  - F es consecuencia lógica de S
  - todos los modelos de S lo son de F.

6.3.6. Equivalencia lógica

- Def.: Sean F y G fórmulas de L. F y G son equivalentes si para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_A(G)$.
  Se representa por $F \equiv G$.
- Ejemplos:
  - $P(x) \not\equiv P(y)$.
    $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $P^I = \{1\}$ y $A(x) = 1, A(y) = 2$.
  - $\forall x\ P(x) \equiv \forall y\ P(y)$.
  - $\forall x\ (P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x)$.
  - $\exists x\ (P(x) \land Q(x)) \not\equiv \exists x\ P(x) \land \exists x\ Q(x)$.
    $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $P^I = \{1\}$ y $Q^I = \{2\}$.
- Propiedades: Sean F y G fórmulas cerradas de L.
  - $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
  - $F \equiv G$ syss $F \models G$ y $G \models F$.
- Propiedades básicas de la equivalencia lógica:
  - Reflexiva: $F \equiv F$
  - Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$

- Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$

- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:
  - Prop.: Si en la fórmula F_1 se sustituye una de sus subfórmulas G_1 por una fórmula G_2 lógicamente equivalente a G_1, entonces la fórmula obtenida, F_2, es lógicamente equivalente a F_1.
  - Ejemplo: $$\begin{aligned} F_1 &= \forall x\ P(x) \to \exists x\ Q(x) \\ G_1 &= \forall x\ P(x) \\ G_2 &= \forall y\ P(y) \\ F_2 &= \forall y\ P(y) \to \exists x\ Q(x) \end{aligned}$$

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) pp. 195–259 y 323–326.
2. M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 17–26.
3. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 64–87.
4. J.H. Gallier *Logic for computer science (foundations of automatic theorem Proving)* (June 2003) pp. 146–186.
5. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) pp. 90–109 y 128–140.
6. M. Ojeda e I. Pérez de Guzmán *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de primer orden)* (Ágora, 1997) pp. 1–37 y 49–51.
7. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 22–29.

Bibliografía complementaria

Tema 7

Deducción natural en lógica de primer orden

Contenido

7.1. Sustituciones **81**

7.1.1. Definición de sustitución 81

7.1.2. Aplicación de sustituciones a términos 81

7.1.3. Aplicación de sustituciones a fórmulas 82

7.1.4. Sustituciones libres 83

7.2. Reglas de deducción natural de cuantificadores **83**

7.2.1. Reglas del cuantificador universal 83

7.2.2. Reglas del cuantificador existencial 84

7.2.3. Demostración de equivalencias por deducción natural 85

7.3. Reglas de la igualdad **90**

7.3.1. Regla de eliminación de la igualdad 90

7.3.2. Regla de introducción de la igualdad 90

7.1. Sustituciones

7.1.1. Definición de sustitución

- Def.: Una sustitución σ (de L) es una aplicación $\sigma : \text{Var} \to \text{Térm}(L)$.
- Notación: $[x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n]$ representa la sustitución σ definida por
$$\sigma(x) = \begin{cases} t_i, & \text{si } x \text{ es } x_i; \\ x, & \text{si } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$

- Ejemplo: $[x/s(0), y/x+y]$ es la sustitución σ de *Var* en los términos de la aritmética definida por
  $\sigma(x) = s(0), \sigma(y) = x+y$ y $\sigma(z) = z$ para $z \in \text{Var} \setminus \{x, y\}$
- Notación: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ representarán sustituciones.

7.1.2. Aplicación de sustituciones a términos

- Def.: $t[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ es el término obtenido sustituyendo en t las apariciones de x_i por t_i.
- Def.: La extensión de σ a términos es la aplicación $\sigma : \text{Térm}(L) \to \text{Térm}(L)$ definida por

$$t\sigma = \begin{cases} c, & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ \sigma(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

- Ejemplo: Si $\sigma = [x/f(y,a), y/z]$, entonces
  - $a\sigma = a$, donde a es una constante.
  - $w\sigma = w$, donde w es una variable distinta de x e y.
  - $h(a,x,w)\sigma = h(a\sigma, x\sigma, w\sigma) = h(a, f(y,a), w)$
  - $f(x,y)\sigma = f(x\sigma, y\sigma) = f(f(y,a), z)$
  - $h(a, f(x,y), w)\sigma = h(a\sigma, f(x,y)\sigma, w\sigma) = h(a, f(f(y,a), z), w)$

7.1.3. Aplicación de sustituciones a fórmulas

- Def.: $F[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ es la fórmula obtenida sustituyendo en F las apariciones libres de x_i por t_i.
- Def.: La extensión de σ a fórmulas es la aplicación $\sigma : \text{Fórm}(L) \to \text{Fórm}(L)$ definida por

$$F\sigma = \begin{cases} P(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma), & \text{si } F \text{ es la fórmula atómica } P(t_1, \ldots, t_n); \\ t_1\sigma = t_2\sigma, & \text{si } F \text{ es la fórmula } t_1 = t_2; \\ \neg(G\sigma), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ G\sigma * H\sigma, & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ (Qx)(G\sigma_x), & \text{si } F \text{ es } (Qx)G \text{ y } Q \in \{\forall, \exists\} \end{cases}$$

  donde σ_x es la sustitución definida por

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y \text{ es } x; \\ \sigma(y), & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}.$$

- Ejemplos: Si $\sigma = [x/f(y), y/b]$, entonces
  - $$\begin{aligned}(\forall x\ (Q(x) \to R(x,y)))\sigma &= \forall x\ ((Q(x) \to R(x,y))\sigma_x) \\ &= \forall x\ (Q(x)\sigma_x \to R(x,y)\sigma_x) \\ &= \forall x\ (Q(x) \to R(x,b))\end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned}(Q(x) \to \forall x\ R(x,y))\sigma &= Q(x)\sigma \to (\forall x\ R(x,y))\sigma \\ &= Q(f(y)) \to \forall x\ (R(x,y)\sigma_x) \\ &= Q(f(y)) \to \forall x\ R(x,b)\end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned}(\forall x\ (Q(x) \to \forall y\ R(x,y)))\sigma &= \forall x\ ((Q(x) \to \forall y\ R(x,y))\sigma_x) \\ &= \forall x\ (Q(x)\sigma_x \to (\forall y\ R(x,y))\sigma_x) \\ &= \forall x\ (Q(x) \to \forall y\ (R(x,y)\sigma_{xy})) \\ &= \forall x\ (Q(x) \to \forall y\ R(x,y))\end{aligned}$$

7.1.4. Sustituciones libres

- Def.: Una sustitución se denomina libre para una fórmula cuando todas las apariciones de variables introducidas por la sustitución en esa fórmula resultan libres.
- Ejemplos:
  - $[y/x]$ no es libre para $\exists x\ (x < y)$
    $\exists x\ (x < y)[y/x] = \exists x\ (x < x)$
  - $[y/g(y)]$ es libre para $\forall x\ (P(x) \to Q(x, f(y)))$
    $\forall x\ (P(x) \to Q(x, f(y)))[y/g(y)]$
    $= \forall x\ (P(x) \to Q(x, f(g(y))))$
  - $[y/g(x)]$ no es libre para $\forall x\ (P(x) \to Q(x, f(y)))$
    $\forall x\ (P(x) \to Q(x, f(y)))[y/g(x)]$
    $= \forall x\ (P(x) \to Q(x, f(g(x))))$
- Convenio: Al escribir $F\sigma$ supondremos que σ es libre para F.

7.2. Reglas de deducción natural de cuantificadores

7.2.1. Reglas del cuantificador universal

Regla de eliminación del cuantificador universal

- Regla de eliminación del cuantificador universal:
  $$\frac{\forall x\ F}{F[x/t]}\ \forall e$$
  donde $[x/t]$ es libre para F.

- Nota: Analogía con $\wedge e_1$ y $\wedge e_2$.
- Ejemplo: $P(c), \forall x\ [P(x) \to \neg Q(x)] \vdash \neg Q(c)$

1	$P(c)$	premisa
2	$\forall x\ (P(x) \to \neg Q(x))$	premisa
3	$P(c) \to Q(c)$	$\forall$e 2
4	$Q(c)$	$\to$e $3, 1$

- Nota: $\forall x\ \exists y\ (x < y) \not\vdash \exists y\ (y < y)$.

Regla de introducción del cuantificador universal

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \quad F[x/x_0] \end{array}}}{\forall x\ F}\ \forall i$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

- Nota: Analogía con $\wedge$i.
- $\forall x\ [P(x) \to \neg Q(x)], \forall x\ P(x) \vdash \forall x\ \neg Q(x)$

1	$\forall x\ (P(x) \to \neg Q(x))$	premisa
2	$\forall x\ P(x)$	premisa
3	actual x_0	supuesto
4	$P(x_0) \to \neg Q(x_0)$	$\forall$e $1, 3$
5	$P(x_0)$	$\forall$e $2, 3$
6	$Q(x_0)$	$\to$e $4, 5$
7	$\forall x\ \neg Q(x)$	$\forall$i $3-6$

7.2.2. Reglas del cuantificador existencial

Regla de introducción del cuantificador existencial

- Regla de introducción del cuantificador existencial:

$$\frac{F[x/t]}{\exists x\ F}\ \exists i$$

donde $[x/t]$ es libre para F.

- Nota: Analogía con $\vee i_1$ y $\vee i_2$.
- Ejemplo 3: $\forall x\ P(x) \vdash \exists x\ P(x)$

1	$\forall x\ P(x)$	premisa
2	$P(x_0)$	$\forall$e 1
3	$\exists x\ P(x)$	$\exists$i 2

Regla de eliminación del cuantificador existencial

$$\dfrac{\exists x\ F \qquad \boxed{\begin{array}{ll} x_0 & F[x/x_0] \\ & \vdots \\ & G \end{array}}}{G}\ {\color{red}\exists e}$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

- Nota: Analogía con $\vee$e.
- Ejemplo: $\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \exists x\ P(x) \vdash \exists x\ Q(x)$

1	$\forall x\ (P(x) \to Q(x))$	premisa
2	$\exists x\ P(x)$	premisa
3	actual $x_0, P(x_0)$	supuesto
4	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall$e $1,3$
5	$Q(x_0)$	$\to$e $4,3$
6	$\exists x\ Q(x)$	$\exists$i 5
7	$\exists x\ Q(x)$	$\exists$e $2,3-6$

7.2.3. Demostración de equivalencias por deducción natural

Equivalencias

- Sean F y G fórmulas.

  [1(a)] $\neg\forall x\ F \equiv \exists x\ \neg F$

  [1(b)] $\neg\exists x\ F \equiv \forall x\ \neg F$

- Sean F y G fórmulas y x una varible no libre en G.

  [2(a)] $\forall x\ F \wedge G \equiv \forall x\ (F \wedge G)$

  [2(b)] $\forall x\ F \vee G \equiv \forall x\ (F \vee G)$

  [2(c)] $\exists x\ F \wedge G \equiv \exists x\ (F \wedge G)$

[2(d)] $\exists x\ F \lor G \equiv \exists x\ (F \lor G)$

- Sean F y G fórmulas.

  [3(a)] $\forall x\ F \land \forall x\ G \equiv \forall x\ (F \land G)$

  [3(b)] $\exists x\ F \lor \exists x\ G \equiv \exists x\ (F \lor G)$

- Sean F y G fórmulas.

  [4(a)] $\forall x\ \forall y\ F \equiv \forall y\ \forall x\ F$

  [4(b)] $\exists x\ \exists y\ F \equiv \exists y\ \exists x\ F$

Equivalencia 1(a) $\to$

$\neg\forall x\ P(x) \vdash \exists x\ \neg P(x)$

1	$\neg\forall x\ P(x)$	premisa
2	$\neg\exists x\ \neg P(x)$	supuesto
3	actual x_0	supuesto
4	$\neg P(x_0)$	supuesto
5	$\exists x\ \neg P(x)$	$\exists$i $4, 3$
6	$\bot$	$\neg$e $2, 5$
7	$P(x_0)$	RAA $4 - 6$
8	$\forall x\ P(x)$	$\forall$i $3 - 7$
9	$\bot$	$\neg$e $1, 8$
10	$\exists x\ \neg P(x)$	RAA $2 - 9$

Equivalencia 1(a) $\leftarrow$

$\exists x\ \neg P(x) \vdash \neg\forall x\ P(x)$

1	$\exists x\ \neg P(x)$	premisa
2	$\neg\neg\forall x\ P(x)$	supuesto
3	actual $x_0, \neg P(x_0)$	supuesto
4	$\forall x\ P(x)$	$\neg\neg$e 2
5	$P(x_0)$	$\forall$e 4
6	$\bot$	$\neg$e $3,5$
7	$\bot$	$\exists$e $1,\ 3-6$
8	$\neg\forall x\ P(x)$	RAA $2-7$

Equivalencia 1(a) $\leftrightarrow$

$\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$

1	$\neg\forall x\ P(x)$	supuesto
2	$\exists x\ \neg P(x)$	Lema $1(\mathrm{a})\ \rightarrow$
3	$\neg\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ \neg P(x)$	$\rightarrow$i $1-2$
4	$\exists x\ \neg P(x)$	supuesto
5	$\neg\forall x\ P(x)$	Lema $1(\mathrm{a})\ \leftarrow$
6	$\exists x\ \neg P(x) \rightarrow \neg\forall x\ P(x)$	$\rightarrow$i $4-5$
7	$\neg\forall x\ P(x) \leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$	$\leftrightarrow$i $3,6$

Equivalencia 3(a) $\rightarrow$

$\forall x\ (P(x) \land Q(x)) \vdash \forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x)$

1	$\forall x\ (P(x) \land Q(x))$	premisa
2	actual x_0	supuesto
3	$P(x_0) \land Q(x_0)$	$\forall$e $1, 2$
4	$P(x_0)$	$\land$e$_1$ 3
5	$\forall x\ P(x)$	$\forall$i $2-4$
6	actual x_1	supuesto
7	$P(x_1) \land Q(x_1)$	$\forall$e $1, 6$
8	$Q(x_1)$	$\land$e$_2$ 7
9	$\forall x\ Q(x)$	$\forall$i $6-8$
10	$\forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x)$	$\land$i $5, 9$

Equivalencia 3(a) $\leftarrow$

$\forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x) \vdash \forall x\ (P(x) \land Q(x))$

1	$\forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x)$	premisa
2	actual x_0	supuesto
3	$\forall x\ P(x)$	$\land$e$_1$ 1
4	$P(x_0)$	$\forall$e $3, 2$
5	$\forall x\ Q(x)$	$\land$e$_2$ 1
6	$Q(x_0)$	$\forall$e 5
7	$P(x_0) \land Q(x_0)$	$\land$i $4, 6$
8	$\forall x\ (P(x) \land Q(x))$	$\forall$i $2-7$

Equivalencia 3(a) $\leftrightarrow$

$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$

1	$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$	supuesto
2	$\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$	Lema 3(a) $\rightarrow$
3	$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$	$\rightarrow$i $1-2$
4	$\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$	supuesto
5	$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$	Lema 3(a) $\leftarrow$
6	$\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x) \rightarrow \forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$	$\rightarrow$i $4-5$
7	$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$	$\leftrightarrow$i $3,6$

Equivalencia 3(b) $\rightarrow$

$\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x) \vdash \exists x\ (P(x) \vee Q(x))$

1	$\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$			premisa
2	$\exists x\ P(x)$	supuesto	$\exists x\ Q(x)$	supuesto
3	actual $x_0, P(x_0)$	supuesto	actual $x_1, Q(x_1)$	supuesto
4	$P(x_0) \vee Q(x_0)$	$\vee$i$_1$ 3	$P(x_1) \vee Q(x_1)$	$\vee$i$_2$ $3'$
5	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	$\exists$i $4,3$	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	$\exists$i $3',4'$
6	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	$\exists$e $2,3-5$	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	$\exists$e $2',3'-5'$
7	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$			$\vee$1e $,2-6,2'-6'$

Equivalencia 3(b) $\leftarrow$

$\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$

1	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	premisa
2	actual $x_0,\ P(x_0) \vee Q(x_0)$	supuesto
3	$P(x_0)$	supuesto
4	$\exists x\ P(x)$	$\exists$i $3,2$
5	$\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$	$\vee$i$_1$ 4
6	$Q(x_0)$	supuesto
7	$\exists x\ Q(x)$	$\exists$i $6,2$
8	$\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$	$\vee$i$_2$ 7
9	$\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$	$\vee$e $2,3-5,6-8$
10	$\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$	$\exists$e $1,2-9$

Equivalencia 3(b) $\leftrightarrow$

$\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x) \equiv \exists x\ (P(x) \lor Q(x))$

1	$\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x)$	supuesto
2	$\exists x\ (P(x) \lor Q(x))$	Lema 3(b) $\rightarrow$
3	$\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x) \rightarrow \exists x\ (P(x) \lor Q(x))$	$\rightarrow$i $1-2$
4	$\exists x\ (P(x) \lor Q(x))$	supuesto
5	$\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x)$	Lema 3(b) $\leftarrow$
6	$\exists x\ (P(x) \lor Q(x)) \rightarrow \exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x)$	$\rightarrow$i $4-5$
7	$\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x) \leftrightarrow \exists x\ (P(x) \lor Q(x))$	$\leftrightarrow$i $3, 6$

Equivalencia 4(b) $\rightarrow$

$\exists x\ \exists y\ P(x,y) \vdash \exists y\ \exists x\ P(x,y)$

1	$\exists x\ \exists y\ P(x,y)$	premisa
2	actual x_0, $\exists y\ P(x_0,y)$	supuesto
3	actual y_0, $P(x_0,y_0)$	supuesto
4	$\exists x\ P(x,y_0)$	$\exists$i 3,2, 2,1
5	$\exists y\ \exists x\ P(x,y)$	$\exists$i 4, 3,1
6	$\exists y\ \exists x\ P(x,y)$	$\exists$e 2,2, $3-5$
7	$\exists y\ \exists x\ P(x,y)$	$\exists$e $1, 2-6$

Equivalencia 4(b) $\leftrightarrow$

$\exists x\ \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y\ \exists x\ P(x,y)$

1	$\exists x\ \exists y\ P(x,y)$	supuesto
2	$\exists y\ \exists x\ P(x,y)$	Lema 4(b) $\rightarrow$
3	$\exists x\ \exists y\ P(x,y) \rightarrow \exists y\ \exists x\ P(x,y)$	$\rightarrow$i $1-2$
4	$\exists y\ \exists x\ P(x,y)$	supuesto
5	$\exists x\ \exists y\ P(x,y)$	Lema 4(b) $\rightarrow$
6	$\exists y\ \exists x\ P(x,y) \rightarrow \exists x\ \exists y\ P(x,y)$	$\rightarrow$i $4-5$
7	$\exists x\ \exists y\ P(x,y) \leftrightarrow \exists y\ \exists x\ P(x,y)$	$\leftrightarrow$i $3, 6$

7.3. Reglas de la igualdad

7.3.1. Regla de eliminación de la igualdad

- Regla de eliminación de la igualdad:
  $$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} = e$$
  donde $[x/t_1]$ y $[x/t_2]$ son libres para F.

- Ejemplo:

1	$(x+1) = (1+x)$	premisa
2	$(x+1>1) \to (x+1>0)$	premisa
3	$(1+x>1) \to (1+x>0)$	=e 1, 2

- Ejemplo: $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_2 = t_3$	premisa
3	$t_1 = t_3$	=e 2, 1

7.3.2. Regla de introducción de la igualdad

- Regla de introducción de la igualdad:
  $$\frac{}{t = t} = i$$

- Ejemplo: $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_1 = t_1$	=i
3	$t_2 = t_1$	=e 1, 2

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) pp. 259–287.
2. R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998)
3. J. Dingel *Propositional and predicate logic: a review.* (2000) pp. 28–33.
4. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 88–94.

5. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) pp. 109-127.

Tema 8

Tableros semánticos

Contenido

8.1. **Fórmulas gamma y delta** 93

8.2. **Consecuencia mediante tableros semánticos** 93

8.1. Fórmulas gamma y delta

- Un término es básico si no contiene variables.
- Las fórmulas gamma, junto con sus componentes, son

$\forall x\ F$	$F[x/t]$	(con t un término básico)
$\neg\exists x\ F$	$\neg F[x/t]$	(con t un término básico)

- Las fórmulas delta, junto con sus componentes, son

$\exists x\ F$	$F[x/a]$	(con a una nueva constante)
$\neg\forall x\ F$	$\neg F[x/a]$	(con a una nueva constante)

8.2. Consecuencia mediante tableros semánticos

Ejemplo de consecuencia mediante tableros semánticos

$\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \exists x\ P(x)\} \vdash_{Tab} \exists x\ Q(x)$

1 $\forall x\ [P(x) \to Q(x)]$
2 $\exists x\ P(x)$
3 $\neg\exists x\ Q(x)$
4 $P(a)$ (2)
5 $P(a) \to Q(a)$ (1)

6 $\neg P(a)$ (5)	7 $Q(a)$ (5)
	8 $\neg Q(a)$ (3)
Cerrada	Cerrada
(6 y 4)	(8 y 7)

Ejemplo de consecuencia mediante tableros semánticos

$\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \forall x\ [Q(x) \to R(x)]\} \vdash_{Tab} \forall x\ [P(x) \to R(x)]$

1 $\forall x\ [P(x) \to Q(x)]$
2 $\forall x\ [Q(x) \to R(x)]$
3 $\neg\forall x\ [P(x) \to R(x)]$
4 $\neg(P(a) \to R(a))$ (3)
5 $P(a)$ (4)
6 $\neg R(a)$ (4)
7 $P(a) \to Q(a)$ (1)
8 $Q(a) \to R(a)$ (2)

9 $\neg P(a)$ (7)	10 $Q(a)$ (7)
Cerrada (9, 5)	

11 $\neg Q(a)$ (8)	12 $R(a)$ (8)
Cerrada (11, 10)	Cerrada (12, 6)

Ejemplo de no consecuencia mediante tablero

$\forall x\ [P(x) \vee Q(x)] \not\models \forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$

1 $\forall x\ [P(x) \vee Q(x)]$
2 $\neg(\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x))$
3 $\neg\forall x\ P(x)$ (2)
4 $\neg\forall x\ Q(x)$ (2)
5 $\neg P(a)$ (3)
6 $\neg Q(b)$ (4)
7 $P(a) \vee Q(a)$ (1)
8 $P(b) \vee Q(b)$ (1)

9 $P(a)$ (7) — Cerrada (9,5)

10 $Q(a)$ (7)

11 $P(b)$ (8) — Abierta

12 $Q(b)$ (8) — Cerrada (12, 6)

Contramodelo: $U = \{a, b\}, I(P) = \{b\}, I(Q) = \{a\}$.

Bibliografía

1. Ben–Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)

   Cap. 2: Propositional calculus: formulas, models, tableaux

2. Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995)

   Cap. 3: Semantic tableaux and resolution

3. Hortalá, M.T.; Leach, J. y Rogríguez, M. *Matemática discreta y lógica matemática* (Ed. Complutense, 1998)

   Cap. 7.9: Tableaux semánticos para la lógica de proposiciones

4. Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)

   Cap. 1.4: Tableau proofs in propositional calculus

5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)

   Cap. 4.3: Métodos de las tablas semánticas

* Un ejemplo de no consecuencia con más de un contramodelo.

Tema 9

Formas normales de Skolem y cláusulas

Contenido

9.1. Formas normales **97**

9.1.1. Forma rectificada 97

9.1.2. Forma normal prenexa 97

9.1.3. Forma normal prenexa conjuntiva 99

9.1.4. Forma de Skolem 100

9.2. Cláusulas de primer orden **102**

9.2.1. Sintaxis de la lógica clausal de primer orden 102

9.2.2. Semántica de la lógica clausal de primer orden 102

9.2.3. Forma clausal de una fórmula 103

9.2.4. Forma clausal de un conjunto de fórmulas 104

9.2.5. Redución de consecuencia e inconsistencia de cláusulas 105

9.1. Formas normales

9.1.1. Forma rectificada

- Def.: F está en forma rectificada si ninguna variable aparece libre y ligada y cada cuantificador se refiere a una variable diferente.

- Ejemplos:
  $\forall x\ P(x) \to \forall y\ Q(z,y)$ está en forma rectificada
  $\forall x\ P(x) \to \forall y\ Q(x,y)$ no está en forma rectificada
  $\forall x\ P(x) \to \forall x\ Q(z,x)$ no está en forma rectificada

- Prop.: Para toda fórmula F existe una fórmula equivalente G en forma rectificada.

- Lema del renombramiento: Si y no aparece libre en F, entonces
  $\forall x\ F \equiv \forall y\ F[x/y]$
  $\exists x\ F \equiv \exists y\ F[x/y]$.

- Ejemplos de rectificación:
  $\forall x\ P(x) \to \forall x\ Q(z,x) \quad \equiv \forall x\ P(x) \to \forall u\ Q(z,u)$
  $\forall x\ P(x) \to \forall y\ Q(x,y) \quad \equiv \forall z\ P(z) \to \forall y\ Q(x,y)$

9.1.2. Forma normal prenexa

Fórmula en forma normal prenexa

- Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa (FNP) si es de la forma

$$(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) G$$

  donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores. $(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n)$ se llama el prefijo de F y G se llama la matriz de F.

- Ejemplos:

Fórmula	¿FNP?
$\neg \exists x\ [P(x) \to \forall x\ P(x)]$	no
$\forall x\ \exists y\ [P(x) \land \neg P(y)]$	sí
$\forall x\ P(x) \lor \exists y\ Q(y)$	no
$\forall x\ \exists y\ [P(x) \lor Q(y)]$	sí
$\exists y\ \forall x\ [P(x) \lor Q(y)]$	sí
$\neg(\forall x\ [P(x) \to Q(x)] \to \forall x\ [P(x) \to R(x)])$	no
$\exists z\ \forall x\ \forall y\ [((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land P(z)]$	sí

Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa

Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa rectificada:

1. Rectificar la fórmula usando las equivalencias
   $\forall x\ F \equiv \forall y\ F[x/y]$ (1)
   $\exists x\ F \equiv \exists y\ F[x/y]$ (2)
   donde y es una variable que no ocurre libre en F.

2. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
   $F \leftrightarrow G \equiv (F \to G) \land (G \to F)$ (3)

3. Eliminar los condicionales usando la equivalencia
   $F \to G \equiv \neg F \vee G$ (4)

4. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias
   $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$ (5)
   $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$ (6)
   $\neg\neg F \equiv F$ (7)
   $\neg\forall x\ F \equiv \exists x\ \neg F$ (8)
   $\neg\exists x\ F \equiv \forall x\ \neg F$ (9)

5. Exteriorizar los cuantificadores usando las equivalencias
   $\forall x\ F \wedge G \equiv \forall x\ (F \wedge G)$ con x no libre en G. (11)
   $\forall x\ F \vee G \equiv \forall x\ (F \vee G)$ con x no libre en G. (12)
   $\exists x\ F \wedge G \equiv \exists x\ (F \wedge G)$ con x no libre en G. (13)
   $\exists x\ F \vee G \equiv \exists x\ (F \vee G)$ con x no libre en G. (14)
   $G \wedge \forall x\ F \equiv \forall x\ (G \wedge F)$ con x no libre en G. (15)
   $G \vee \forall x\ F \equiv \forall x\ (G \vee F)$ con x no libre en G. (16)
   $G \wedge \exists x\ F \equiv \exists x\ (G \wedge F)$ con x no libre en G. (17)
   $G \vee \exists x\ F \equiv \exists x\ (G \vee F)$ con x no libre en G. (18)

Ejemplos de cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo 1: $\neg\exists x\ [P(x) \to \forall x\ P(x)]$
  $\equiv \neg\exists x\ [P(x) \to \forall y\ P(y)]$ [por (1)]
  $\equiv \neg\exists x\ [\neg P(x) \vee \forall y\ P(y)]$ [por (4)]
  $\equiv \forall x\ [\neg(\neg P(x) \vee \forall y\ P(y))]$ [por (9)]
  $\equiv \forall x\ [\neg\neg P(x) \wedge \neg\forall y\ P(y)]$ [por (6)]
  $\equiv \forall x\ [P(x) \wedge \exists y\ \neg P(y)]$ [por (7 y 8)]
  $\equiv \forall x\ \exists y\ [P(x) \wedge \neg P(y)]$ [por (17)]

- Ejemplo 2: $\forall x\ P(x) \vee \exists y\ Q(y)$
  $\equiv \forall x\ [P(x) \vee \exists y\ Q(y)]$ [por (12)]
  $\equiv \forall x\ \exists y\ [P(x) \vee Q(y)]$ [por (18)]

- Ejemplo 3: $\forall x\ P(x) \vee \exists y\ Q(y)$
  $\equiv \exists y\ [\forall x\ P(x) \vee Q(y)]$ [por (18)]
  $\equiv \exists y\ \forall x\ [P(x) \vee Q(y)]$ [por (12)]

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(\forall x\ [P(x) \to Q(x)] \land \forall x\ [Q(x) \to R(x)] \to \forall x\ [P(x) \to R(x)]) & \\
\equiv & \neg(\forall x\ [P(x) \to Q(x)] \land \forall y\ [Q(y) \to R(y)] \to \forall z\ [P(z) \to R(z)]) & \text{[por (1)]} \\
\equiv & \neg(\neg(\forall x\ [\neg P(x) \lor Q(x)] \land \forall y\ [\neg Q(y) \lor R(y)]) \lor \forall z\ [\neg P(z) \lor R(z)]) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & \neg\neg(\forall x\ [\neg P(x) \lor Q(x)] \land \forall y\ [\neg Q(y) \lor R(y)]) \land \neg\forall z\ [\neg P(z) \lor R(z)] & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\forall x\ [\neg P(x) \lor Q(x)] \land \forall y\ [\neg Q(y) \lor R(y)]) \land \exists z\ [\neg(\neg P(z) \lor R(z))] & \text{[por (7, 8)]} \\
\equiv & (\forall x\ [\neg P(x) \lor Q(x)] \land \forall y\ [\neg Q(y) \lor R(y)]) \land \exists z\ [\neg\neg P(z) \land \neg R(z)] & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\forall x\ [\neg P(x) \lor Q(x)] \land \forall y\ [\neg Q(y) \lor R(y)]) \land \exists z\ [P(z) \land \neg R(z)] & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \exists z\ [(\forall x\ [\neg P(x) \lor Q(x)] \land \forall y\ [\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (P(z) \land \neg R(z))] & \text{[por (17)]} \\
\equiv & \exists z\ [\forall x\ [(\neg P(x) \lor Q(x)) \land \forall y\ [\neg Q(y) \lor R(y)]] \land (P(z) \land \neg R(z))] & \text{[por (11)]} \\
\equiv & \exists z\ \forall x\ [((\neg P(x) \lor Q(x)) \land \forall y\ [\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (P(z) \land \neg R(z))] & \text{[por (11)]} \\
\equiv & \exists z\ \forall x\ [\forall y\ [(\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))] \land (P(z) \land \neg R(z))] & \text{[por (15)]} \\
\equiv & \exists z\ \forall x\ \forall y\ [((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(z) \land \neg R(z))] & \text{[por (11)]}
\end{array}
$$

9.1.3. Forma normal prenexa conjuntiva

Fórmula en forma normal prenexa conjuntiva

- Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa conjuntiva (FNPC) si es de la forma $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$, G no tiene cuantificadores y G está en forma normal conjuntiva.
- Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa conjuntiva:
  - Algoritmo: Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa conjuntiva rectificada:
    1. Calcular una forma normal prenexa rectificada usando las equivalencias (1)–(18)
    2. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias
       $$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C) \tag{19}$$
       $$(A \land B) \lor C \equiv (A \lor C) \land (B \lor C) \tag{20}$$
  - Ejemplo de cálculo de una FNPC de $\forall x\ \exists y\ [P(x) \lor (Q(y) \land \neg R(y))]$:
    $$\begin{array}{lll} & \forall x\ \exists y\ [P(x) \lor (Q(y) \land \neg R(y))] & \\ \equiv & \forall x\ \exists y\ [(P(x) \lor Q(y)) \land (P(x) \lor \neg R(y))] & \text{[por (19)]} \end{array}$$

9.1.4. Forma de Skolem

Fórmula en forma de Skolem

- Forma de Skolem:
  - Def.: La fórmula F está en forma de Skolem (FS) si es de la forma $\forall x_1\ \dots \forall x_n\ G$, donde $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores.

- Ejemplos:

$\forall x\ \exists y\ P(x,y)$	no está en forma de Skolem
$\forall x\ P(x,f(x))$	sí está en forma de Skolem
$\exists x\ Q(x)$	no está en forma de Skolem
$Q(a)$	sí está en forma de Skolem

- Equisatisfacibilidad:
  - Def.: Las fórmulas F y G son equisatisfacibles si:
    F es satisfacible syss G es satisfacible.
    Se representa por $F \equiv_{sat} G$
  - Ejemplos:

$$\begin{array}{lcl} \exists x\ Q(x) & \equiv_{sat} & Q(a) \\ \exists x\ Q(x) & \not\equiv & Q(a) \\ \forall x\ \exists y\ P(x,y) & \equiv_{sat} & \forall x\ P(x,f(x)) \\ \forall x\ \exists y\ P(x,y) & \not\equiv & \forall x\ P(x,f(x)) \end{array}$$

Algoritmo de cálculo de forma de Skolem

- Propiedades:
  - Si a es una constante que no ocurre en F, entonces $\exists x\ F \equiv_{sat} F[x/a]$.
  - Si g es un símbolo de función n–aria que no ocurre en F, entonces $\forall x_1 \dots \forall x_n\ \exists x\ F \equiv_{sat} \forall x_1 \dots \forall x_n\ F[x/g(x_1,\dots,x_n)]$.
- Algoritmo de cálculo de forma de Skolem:
  - Sea F una fórmula en forma normal prenexa rectificada, la forma de Skolem de F es

$$\text{Sko}(F) = \begin{cases} \text{Sko}(G[x/a]), & \text{si } F \text{ es } \exists x\ G \text{ y} \\ & a \text{ es una nueva constante;} \\ \text{Sko}(\forall x_1 \dots \forall x_n\ G[x/f(x_1,\dots,x_n)]), & \text{si } F \text{ es } \forall x_1 \dots \forall x_n\ \exists x\ G \text{ y} \\ & f \text{ es un nuevo símbolo de función;} \\ F, & \text{si } F \text{ está en forma de Skolem} \end{cases}$$

  - Propiedad: Si F es una fórmula en forma normal prenexa rectificada, entonces $\text{Sko}(F)$ está en forma de Skolem y $\text{Sko}(F) \equiv_{sat} F$.

Ejemplos de cálculo de forma de Skolem

- Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sko}(\exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w\ P(x,y,z,u,v,w)) \\
&= \mathrm{Sko}(\forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w\ P(a,y,z,u,v,w)) \\
&= \mathrm{Sko}(\forall y\ \forall z\ \forall v\ \exists w\ P(a,y,z,f(y,z),v,w)) \\
&= \mathrm{Sko}(\forall y\ \forall z\ \forall v\ P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))) \\
&= \forall y\ \forall z\ \forall v\ P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))
\end{aligned}$$

- Ejemplo 2:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sko}(\forall x\ \exists y\ \forall z\ \exists w\ [\neg P(a,w) \lor Q(f(x),y)]) \\
&= \mathrm{Sko}(\forall x\ \forall z\ \exists w\ [\neg P(a,w) \lor Q(f(x),h(x))]) \\
&= \mathrm{Sko}(\forall x\ \forall z\ [\neg P(a,g(x,z)) \lor Q(f(x),h(x))]) \\
&= \forall x\ \forall z\ [\neg P(a,g(x,z)) \lor Q(f(x),h(x))]
\end{aligned}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll}
 & \neg\exists x\ [P(x) \to \forall x\ P(x)] \\
\equiv & \forall x\ \exists y\ [P(x) \land \neg P(y)] \quad \text{[por página 99]} \\
\equiv_{sat} & \forall x\ [P(x) \land \neg P(f(x))]
\end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll}
 & \forall x\ P(x) \lor \exists y\ Q(y) \\
\equiv & \forall x\ \exists y\ [P(x) \lor Q(y)] \quad \text{[por página 99]} \\
\equiv_{sat} & \forall x\ [P(x) \lor Q(f(x))]
\end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll}
 & \forall x\ P(x) \lor \exists y\ Q(y) \\
\equiv & \exists y\ \forall x\ [P(x) \lor Q(y)] \quad \text{[por página 99]} \\
\equiv_{sat} & \forall x\ [P(x) \lor Q(a)]
\end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\forall x\ [P(x) \to Q(x)] \land \forall x\ [Q(x) \to R(x)] \to \forall x\ [P(x) \to R(x)]) \\
\equiv & \exists z\ \forall x\ \forall y\ [((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(z) \land \neg R(z))] \quad \text{[p. 99]} \\
\equiv_{sat} & \forall x\ \forall y\ [((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(a) \land \neg R(a))]
\end{array}$$

9.2. Cláusulas de primer orden

9.2.1. Sintaxis de la lógica clausal de primer orden

- Un átomo es una fórmula atómica.
  Variables sobre átomos: $A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots$.

- Un literal es un átomo (A) o la negación de un átomo ($\neg A$).
  Variables sobre literales: $L, L_1, L_2, \dots$.
- Una cláusula es un conjunto finito de literales.
  Variables sobre cláusulas: $C, C_1, C_2, \dots$.
- La cláusula vacía es el conjunto vacío de literales.
  La cláusula vacía se representa por $\square$.
- Conjuntos finitos de cláusulas.
  Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: $S, S_1, S_2, \dots$.

9.2.2. Semántica de la lógica clausal de primer orden

- Fórmulas correspondientes:
  - Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\{L_1, \dots, L_n\}$ es
    $\forall x_1 \dots \forall x_p\ [L_1 \vee \dots \vee L_n]$,
    donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de $L_1 \vee \dots \vee L_n$.
  - Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\square$ es $\perp$.
  - Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas
    $\{\{L_1^1, \dots, L_{n_1}^1\}, \dots, \{L_1^m, \dots, L_{n_m}^m\}\}$,
    cuyas variables libres son $x_1, \dots, x_p$, es
    $\forall x_1 \dots \forall x_p\ [(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)]$.
  - Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas $\emptyset$ es $\top$.
- Semántica:
  - Def.: En cualquier interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$, $I(\top) = 1$ e $I(\perp) = 0$.
  - Def.: Los conceptos semánticos relativos a las cláusulas y a los conjuntos de cláusulas son los de sus correspondientes fórmulas.

9.2.3. Forma clausal de una fórmula

- Def.: Una forma clausal de una fórmula F es un conjunto de cláusulas S tal que $F \equiv_{sat} S$.
- Algoritmo: Aplicando a la fórmula F los siguientes pasos se obtiene S que es una forma clausal de F:
  1. Sea $F_1 = \exists y_1 \dots \exists y_n\ F$, donde $y_1, \dots, y_n$ son las variables libres de F.

2. Sea F_2 una forma normal prenexa conjuntiva rectificada de F_1 calculada mediante el algoritmo de la página 99.
3. Sea $F_3 = \text{Sko}(F_2)$, que tiene la forma
   $\forall x_1 \ \ldots \forall x_p \ [(L_1^1 \vee \cdots \vee L_{n_1}^1) \wedge \cdots \wedge (L_1^m \vee \cdots \vee L_{n_m}^m)]$,
4. Sea $S = \{\{L_1^1, \ldots, L_{n_1}^1\}, \ldots, \{L_1^m, \ldots, L_{n_m}^m\}\}$.

- Prop.: $F \equiv_{sat} F_1 \equiv F_2 \equiv_{sat} F_3 \equiv S$.

Ejemplos de cálculo de forma clausal de una fórmula

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de
  $$\begin{array}{ll} & \neg\exists x \ [P(x) \to \forall x \ P(x)] \\ \equiv_{sat} & \forall x \ [P(x) \wedge \neg P(f(x))] \quad \text{[pág. 101]} \\ \equiv & \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\} \end{array}$$
- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de
  $$\begin{array}{ll} & \forall x \ P(x) \vee \exists y \ Q(y) \\ \equiv_{sat} & \forall x \ [P(x) \vee Q(f(x))] \quad \text{[pág. 101]} \\ \equiv & \{\{P(x), Q(f(x))\}\} \end{array}$$
- Ejemplo de cálculo de otra forma clausal de
  $$\begin{array}{ll} & \forall x \ P(x) \vee \exists y \ Q(y) \\ \equiv_{sat} & \forall x \ [P(x) \vee Q(a)] \quad \text{[pág. 101]} \\ \equiv & \{\{P(x), Q(a)\}\} \end{array}$$
- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de
  $$\begin{array}{ll} & \neg(\forall x \ [P(x) \to Q(x)] \wedge \forall x \ [Q(x) \to R(x)] \to \forall x \ [P(x) \to R(x)]) \\ \equiv_{sat} & \forall x \ \forall y \ [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(a) \wedge \neg R(a))] \quad \text{[p 101]} \\ \equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\} \end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(\forall x\ [P(x) \to Q(x)] \land \exists x\ P(x) \to \exists x\ Q(x)) & \\
\equiv & \neg(\forall x\ [P(x) \to Q(x)] \land \exists y\ P(y) \to \exists z\ Q(z)) & [(2)] \\
\equiv & \neg(\neg(\forall x\ [P(x) \to Q(x)] \land \exists y\ P(y)) \lor \exists z\ Q(z)) & [(4)] \\
\equiv & \neg(\neg(\forall x\ [\neg P(x) \lor Q(x)] \land \exists y\ P(y)) \lor \exists z\ Q(z)) & [(4)] \\
\equiv & \neg\neg(\forall x\ [\neg P(x) \lor Q(x)] \land \exists y\ P(y)) \land \neg\exists z\ Q(z) & [(6)] \\
\equiv & (\forall x\ [\neg P(x) \lor Q(x)] \land \exists y\ P(y)) \land \neg\exists z\ Q(z) & [(7)] \\
\equiv & (\forall x\ [\neg P(x) \lor Q(x)] \land \exists y\ P(y)) \land \forall z\ \neg Q(z) & [(9)] \\
\equiv & \exists y\ [\forall x\ [\neg P(x) \lor Q(x)] \land P(y)] \land \forall z\ \neg Q(z) & [(17)] \\
\equiv & \exists y\ [(\forall x\ [\neg P(x) \lor Q(x)] \land P(y)) \land \forall z\ \neg Q(z)] & [(13)] \\
\equiv & \exists y\ [\forall x\ [(\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y))] \land \forall z\ \neg Q(z) & [(11)] \\
\equiv & \exists y\ \forall x\ [((\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y)) \land \forall z\ \neg Q(z)] & [(11)] \\
\equiv & \exists y\ \forall x\ \forall z\ [(\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y) \land \neg Q(z)] & [(15)] \\
\equiv_{sat} & \forall x\ \forall z\ [(\neg P(x) \lor Q(x) \land P(a)) \land \neg Q(z)] & [(15)] \\
\equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\} &
\end{array}
$$

9.2.4. Forma clausal de un conjunto de fórmulas

- Equisatisfacibilidad de conjuntos de fórmulas:
  - Def.: Los conjuntos de fórmulas S_1 y S_2 son equisatisfacibles si:
    S_1 es satisfacible syss S_2 es satisfacible.
    Se representa por $S_1 \equiv_{sat} S_2$.
- Forma clausal de un conjunto de fórmulas:
  - Def.: Una forma clausal de un conjunto de fórmulas S es un conjunto de cláusulas equisatisfacible con S.
  - Prop.: Si $S_1, \dots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \dots, F_n$, entonces $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
  - Ejemplo: Una forma clausal de
    $\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \exists x\ P(x), \neg\exists x\ Q(x)\}$
    es
    $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$.

9.2.5. Redución de consecuencia e inconsistencia de cláusulas

- Prop: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y S una forma clausal de $\neg G$. Son equivalentes:
  1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
  2. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente.

3. $S_1 \cup \cdots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.

- Ejemplos:
  - Ejemplo 1:
    $\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \exists x\ P(x)\} \models \exists x\ Q(x)$
    syss $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ es inconsistente.
  - Ejemplo 2:
    $\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \forall x\ [Q(x) \to R(x)]\} \models \forall x\ [P(x) \to R(x)]$
    syss $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ es inconsistente.

Bibliografía

1. M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 26–31.
2. C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 35–39 y 46–51.
3. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 101–106.
4. S. Hölldobler *Computational logic.* (U. de Dresden, 2004) pp. 62–67.
5. R. Nieuwenhuis *Lógica de primer orden.* (U. Politénica de Cataluña, 2003) pp. 16–17
6. M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 37–49
7. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 43–47.
8. U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 51–61.

Tema 10

Modelos de Herbrand

Contenido

10.1. Modelos de Herbrand **107**

10.1.1. Reducción de la LPO básica a proposicional 107

10.1.2. Universo de Herbrand 108

10.1.3. Base de Herbrand 110

10.1.4. Interpretaciones de Herbrand 110

10.1.5. Modelos de Herbrand 110

10.2. Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia **111**

10.2.1. Interpretación de Herbrand de una interpretación 111

10.2.2. Consistencia mediante modelos de Herbrand 112

10.2.3. Extensiones de Herbrand 113

10.2.4. Teorema de Herbrand 114

10.2.5. Semidecisión mediante el teorema de Herbrand 114

10.1. Modelos de Herbrand

10.1.1. Reducción de la LPO básica a proposicional

- Observación:
  - En este tema sólo se consideran lenguajes de primer orden sin igualdad.
- Reducción de la LPO básica a proposicional
  - Def.: Una fórmula básica es una fórmula sin variables ni cuantificadores.

- Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas básicas. Son equivalentes:
  1. S es consistente en el sentido de la lógica de primer orden.
  2. S es consistente en el sentido de la lógica proposicional.

Ejemplos de reducción de la LPO básica a proposicional

- $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \to P(c)\}$
  es consistente en el sentido de la lógica de primer orden.

- $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \to P(c), \neg P(c)\}$
  es inconsistente en el sentido de la lógica de primer orden.

	P^I	$P(a) \vee P(b)$	$\neg P(b) \vee P(c)$	$P(a) \to P(c)$	$\neg P(c)$
$\mathcal{I}_1$	$\emptyset$	0	1	1	1
$\mathcal{I}_2$	$\{c^I\}$	0	1	1	0
$\mathcal{I}_3$	$\{b^I\}$	1	0	1	1
$\mathcal{I}_4$	$\{b^I, c^I\}$	1	1	1	0
$\mathcal{I}_5$	$\{a^I\}$	1	1	0	1
$\mathcal{I}_6$	$\{a^I, c^I\}$	1	1	1	0
$\mathcal{I}_7$	$\{a^I, b^I\}$	1	0	0	1
$\mathcal{I}_8$	$\{a^I, b^I, c^I\}$	1	1	1	0

- $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \to P(c)\}$
  es consistente en el sentido proposicional (con modelos $\mathcal{I}_4, \mathcal{I}_6, \mathcal{I}_8$).

- $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \to P(c), \neg P(c)\}$
  es inconsistente en el sentido proposicional.
  Se consideran los cambios $P(a)/p, P(b)/q, P(c)/r$

	p	q	r	$p \vee q$	$\neg q \vee r$	$p \to r$	$\neg r$
$\mathcal{I}_1$	0	0	0	0	1	1	1
$\mathcal{I}_2$	0	0	1	0	1	1	0
$\mathcal{I}_3$	0	1	0	1	0	1	1
$\mathcal{I}_4$	0	1	1	1	1	1	0
$\mathcal{I}_5$	1	0	0	1	1	0	1
$\mathcal{I}_6$	1	0	1	1	1	1	0
$\mathcal{I}_7$	1	1	0	1	0	0	1
$\mathcal{I}_8$	1	1	1	1	1	1	0

10.1.2. Universo de Herbrand

Notación

- L representa un lenguaje de primer orden sin igualdad.
- $\mathcal{C}$ es el conjunto de constantes de L.
- $\mathcal{F}$ es el conjunto de símbolos de función de L.
- $\mathcal{R}$ es el conjunto de símbolos de relación de L.
- $\mathcal{F}_n$ es el conjunto de símbolos de función n–aria de L.
- $\mathcal{R}_n$ es el conjunto de símbolos de relación n–aria de L.
- f/n indica que f es un símbolo de función n–aria de L.
- P/n indica que f es un símbolo de relación n–aria de L.

Universo de Herbrand

- Def.: El universo de Herbrand de L es el conjunto de los términos básicos de L. Se representa por $\mathsf{UH}(L)$.
- Prop.: $\mathsf{UH}(L) = \bigcup_{i \geq 0} H_i(L)$, donde $H_i(L)$ es el nivel i del $\mathsf{UH}(L)$ definido por

$$\begin{array}{ll} H_0(L) & = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{si } \mathcal{C} \neq \emptyset; \\ \{a\}, & \text{en caso contrario. } (a \text{ es una nueva constante}). \end{cases} \\ H_{i+1}(L) & = H_i(L) \cup \{f(t_1, \dots, t_n) : f \in \mathcal{F}_n \text{ y } t_1, \dots, t_n \in H_i(L)\} \end{array}$$

- Prop.: $\mathsf{UH}(L)$ es finito syss L no tiene símbolos de función.

Ejemplos de universo de Herbrand

- Si $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{F} = \emptyset$, entonces

$$\begin{array}{ll} H_0(L) & = \{a, b, c\} \\ H_1(L) & = \{a, b, c\} \\ \vdots & \\ \mathsf{UH}(L) & = \{a, b, c\} \end{array}$$

- Si $\mathcal{C} = \emptyset$ y $\mathcal{F} = \{f/1\}$, entonces

$$\begin{array}{ll} H_0(L) & = \{a\} \\ H_1(L) & = \{a, f(a)\} \\ H_2(L) & = \{a, f(a), f(f(a))\} \\ \vdots & \\ \mathsf{UH}(L) & = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

- Si $\mathcal{C} = \{a, b\}$ y $\mathcal{F} = \{f/1, g/1\}$, entonces
  $H_0(L) = \{a, b\}$
  $H_1(L) = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b)\}$
  $H_2(L) = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), \quad f(f(a)), f(f(b)), f(g(a)), f(g(b)),$
  $g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b))\ \}$
  $\vdots$

- Si $\mathcal{C} = \{a, b\}$ y $\mathcal{F} = \{f/2\}$, entonces
  $H_0(L) = \{a, b\}$
  $H_1(L) = \{a, b, f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b)\}$
  $H_2(L) = \{a, b, f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b), f(a, f(a, a)), f(a, f(a, b)), \dots\}$
  $\vdots$

10.1.3. Base de Herbrand

- Def.: La base de Herbrand de L es el conjunto de los átomos básicos de L. Se representa por $\mathsf{BH}(L)$.

- Prop.: $\mathsf{BH}(L) = \{P(t_1, \dots, t_n) : P \in \mathcal{R}_n \text{ y } t_1, \dots, t_n \in \mathsf{UH}(L)\}$.

- Prop.: $\mathsf{BH}(L)$ es finita syss L no tiene símbolos de función.

- Ejemplos:

  - Si $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$ y $\mathcal{R} = \{P/1\}$, entonces
    $\mathsf{UH}(L) = \{a, b, c\}$
    $\mathsf{BH}(L) = \{P(a), P(b), P(c)\}$
  - Si $\mathcal{C} = \{a\}$, $\mathcal{F} = \{f/1\}$ y $\mathcal{R} = \{P/1, Q/1, R/1\}$, entonces
    $\mathsf{UH}(L) = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\}$
    $\mathsf{BH}(L) = \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \dots\}$

10.1.4. Interpretaciones de Herbrand

- Def.: Una interpretación de Herbrand es una interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que

  - U es el universo de Herbrand de L;
  - $I(c) = c$, para cada constante c de L;
  - $I(f) = f$, para cada símbolo de función f de L.

- Prop.: Sea $\mathcal{I}$ una interpretación de Herbrand de L. Si t es un término básico de L, entonces $\mathcal{I}(t) = t$.

- Prop.: Una interpretación de Herbrand queda determinada por un subconjunto de la base de Herbrand, el conjunto de átomos básicos verdaderos en esa interpretación.

10.1.5. Modelos de Herbrand

- Nota: Las definiciones de universo de Herbrand, base de Herbrand e interpretación de Herbrand definidas para un lenguaje se extienden a fórmulas y conjuntos de fórmulas considerando el lenguaje formado por los símbolos no lógicos que aparecen.
- Def.: Un modelo de Herbrand de una fórmula F es una interpretación de Herbrand de F que es modelo de F.
- Def.: Un modelo de Herbrand de un conjunto de fórmulas S es una interpretación de Herbrand de S que es modelo de S.
- Ejemplo: Los modelos de Herbrand de $\{P(a) \lor P(b), \neg P(b) \lor P(c), P(a) \to P(c)\}$ son $\{P(b), P(c)\}, \{P(a), P(c)\}$ y $\{P(a), P(b), P(c)\}$ (ver página 107).
- Ejemplo: Sea $S = \{\forall x\ \forall y\ [Q(b,x) \to P(a) \lor R(y)], P(b) \to \neg\exists z\ \exists u\ Q(z,u)\}$. Entonces, $\mathrm{UH}(S) = \{a,b\}$
  $\mathrm{BH}(S) = \{P(a), P(b), Q(a,a), Q(a,b), Q(b.a), Q(b,b), R(a), R(b)\}$
  Un modelo de Herbrand de S es $\{P(a)\}$.

10.2. Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia

10.2.1. Interpretación de Herbrand de una interpretación

Ejemplo 1:

Sea $S = \{\{\neg Q(b,x), P(a), R(y)\}, \{\neg P(b), \neg Q(z,u)\}\}$ e $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $a^I = 1$, $b^I = 2$, $P^I = \{1\}$, $Q^I = \{(1,1),(2,2)\}$, $R^I = \{2\}$. Entonces, $\mathcal{I} \models S$.
Cálculo de la interpretación de Herbrand $\mathcal{I}^*$ correspondiente a $\mathcal{I}$:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{I}^* & = (\mathsf{UH}(S), I^*) \\
\mathsf{UH}(S) & = \{a, b\} \\
\mathsf{BH}(S) & = \{P(a), P(b), Q(a,a), Q(a,b), Q(b.a), Q(b,b), R(a), R(b)\} \\
I^*(P(a)) & = P^I(a^I) = P^I(1) = \mathsf{V} \\
I^*(P(b)) & = P^I(b^I) = P^I(2) = \mathsf{F} \\
I^*(Q(a,a)) & = Q^I(a^I, a^I) = Q^I(1,1) = \mathsf{V} \\
I^*(Q(a,b)) & = Q^I(a^I, b^I) = Q^I(1,2) = \mathsf{F} \\
I^*(Q(b,a)) & = Q^I(b^I, a^I) = Q^I(2,1) = \mathsf{F} \\
I^*(Q(b,b)) & = Q^I(b^I, b^I) = Q^I(2,2) = \mathsf{V} \\
I^*(R(a))) & = R^I(a^I) = R^I(1) = \mathsf{F} \\
I^*(R(b)) & = R^I(b^I) = R^I(2) = \mathsf{V}
\end{array}
$$

$I^* = \{P(a), Q(a,a), Q(b,b), R(b)\}$ y $\mathcal{I}^* \models S$.

Ejemplo 2:

Sea S el conjunto de cláusulas $\{\{P(a)\}, \{Q(y, f(a))\}\}$ e $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $a^I = 1$, $f^I = \{(1,2), (2,1)\}$, $P^I = \{1\}$, $Q^I = \{(1,2), (2,2)\}$. Entonces, $\mathcal{I} \models S$.

Cálculo de la interpretación de Herbrand $\mathcal{I}^*$ correspondiente a $\mathcal{I}$:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{I}^* & = (\mathsf{UH}(S), I^*) \\
\mathsf{UH}(S) & = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\} \\
\mathsf{BH}(S) & = \{P(f^n(a)) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q(f^n(a), f^m(a)) : n, m \in \mathbb{N}\} \\
I^*(P(a)) & = P^I(a^I) = P^I(1) = \mathsf{V} \\
I^*(P(f(a))) & = P^I(f^I(a^I)) = P^I(f^I(1)) = P^I(2) = \mathsf{F} \\
I^*(P(f(f(a)))) & = P^I(f^I(f^(a^I))) = P^I(1) = \mathsf{V} \\
I^*(P(f^n(a))) & = \begin{cases} \mathsf{V}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ \mathsf{F}, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \\
I^*(Q(f^n(a), f^m(a))) & = \begin{cases} \mathsf{V}, & \text{si } m \text{ es impar;} \\ \mathsf{F}, & \text{en caso contrario.} \end{cases}
\end{array}
$$

$I^* = \{P(f^{2n}(a)) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q(f^n(a), f^{2m+1}(a)) : n, m \in \mathbb{N}\}$ $\mathcal{I}^* \models S$.

10.2.2. Consistencia mediante modelos de Herbrand

- Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas básicas. Son equivalentes:
  1. S es consistente.
  2. S tiene un modelo de Herbrand.
- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Si $\mathcal{I}^*$ es una interpretación de Herbrand correspondiente a un modelo $\mathcal{I}$ de S, entonces $\mathcal{I}^*$ es un modelo de S.
- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
  1. S es consistente.
  2. S tiene un modelo de Herbrand.

- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
    1. S es inconsistente.
    2. S no tiene ningún modelo de Herbrand.
- Prop.: Existen conjuntos de fórmulas consistentes sin modelos de Herbrand.

Ejemplo de conjunto consistente sin modelos de Herbrand

- Sea $S = \{\exists x\ P(x), \neg P(a)\}$. Entonces,
    - S es consistente.
      $\mathcal{I} \models S$ con $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$, $a^I = 1$ y $P^I = \{2\}$.
    - S no tiene modelos de Herbrand
      $\mathsf{UH}(S) = \{a\}$
      $\mathsf{BH}(S) = \{P(a)\}$
      Las interpretaciones de Herbrand de S son $\emptyset$ y $\{P(a)\}$.
      $\emptyset \not\models S$
      $\{P(a)\} \not\models S$
    - Una forma clausal de S es $S' = \{P(b), \neg P(a)\}$.
    - Un modelo de Herbrand de S' es $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$ y $P^I = \{b\}$.

10.2.3. Extensiones de Herbrand

Instancias básicas de una cláusula

- Def.: Una sustitución σ (de L) es una aplicación $\sigma : \text{Var} \to \text{Térm}(L)$.
- Def.: Sea $C = \{L_1, \dots, L_n\}$ una cláusula de L y σ una sustitución de L. Entonces, $C\sigma = \{L_1\sigma, \dots, L_n\sigma\}$ es una instancia de C.
- Ejemplo: Sea $C = \{P(x, a), \neg P(x, f(y))\}$.
  $\mathsf{C}[x/a, y/f(a)] = \{P(f(a), a), \neg P(f(a), f(f(a)))\}$
- Def.: $C\sigma$ es una instancia básica de C si todos los literales de $C\sigma$ son básicos.
- Ejemplo: Sea $C = \{P(x, a), \neg P(x, f(y))\}$.
  $\{P(f(a), a), \neg P(f(a), f(f(a)))\}$ es una instancia básica de C.
  $\{P(f(a), a), \neg P(f(f(a)), f(a))\}$ no es una instancia básica de C.
  $\{P(x, a), \neg P(f(f(a)), f(a))\}$ no es una instancia básica de C.

Extensiones de Herbrand

- Def.: La extensión de Herbrand de un conjunto de cláusulas S es el conjunto de fórmulas
  $\mathsf{EH}(S) = \{C\sigma : C \in S$ y,
  para toda variable x en $C, \sigma(x) \in \mathsf{UH}(S)\}$

- Prop.: $\mathsf{EH}(L) = \bigcup_{i \geq 0} \mathsf{EH}_i(L)$, donde $\mathsf{EH}_i(L)$ es el nivel i de la $\mathsf{EH}(L)$
  $\mathsf{EH}_i(S) = \{C\sigma : C \in S$ y,
  para toda variable x en $C, \sigma(x) \in \mathsf{UH}_i(S)\}$

- Ejemplos:

  - Sea $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$. Entonces,
    $\mathsf{EH}_0(S) = \{\{P(a)\}, \{\neg P(f(a))\}\}$
    $\mathsf{EH}_1(S) = \mathsf{EH}_0(S) \cup \{\{P(f(a))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}\}$
    $\mathsf{EH}_2(S) = \mathsf{EH}_1(S) \cup \{\{P(f(f(a)))\}, \{\neg P(f(f(f(a))))\}\}$
  - Sea $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$. Entonces,
    $\mathsf{EH}(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\}$.
  - Sea $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$. Entonces,
    $\mathsf{EH}(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{\neg Q(a), R(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$.

10.2.4. Teorema de Herbrand

- Teorema de Herbrand: Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:

  1. S es consistente.
  2. $\mathsf{EH}(S)$ es consistente (en el sentido proposicional).

- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Entonces, son equivalentes

  1. S es inconsistente.
  2. $\mathsf{EH}(S)$ tiene un subconjunto finito inconsistente (en el sentido proposicional).
  3. Para algún i, $\mathsf{EH}_i(S)$ es inconsistente (en el sentido proposicional).

10.2.5. Semidecisión mediante el teorema de Herbrand

Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S.
Salida: *Inconsistente*, si S es inconsistente.
  $i := 0$
  bucle
    si $\mathsf{EH}_i(S)$ es inconsistente (en el sentido proposicional) **entonces**

Devolver *Inconsistente* y terminar
en caso contrario
$i := i + 1$
fsi
fbucle

Ejemplos de decisión mediante el teorema de Herbrand

- $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ (p. 113) es inconsistente.
  $\mathsf{EH}_0(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\}$ es inconsistente.

1	$\{\neg P(a), Q(a)\}$	
2	$\{P(a)\}$	
3	$\{\neg Q(a)\}$	
4	$\{Q(a)\}$	Res 1, 2
5	$\square$	Res 3, 4

- $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ es inconsistente.
  $\mathsf{EH}_0(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{\neg Q(a), R(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$.

1	$\{\neg P(a), Q(a)\}$	
2	$\{\neg Q(a), R(a)\}$	
3	$\{P(a)\}$	
4	$\{\neg R(a)\}$	
5	$\{Q(a)\}$	Res 1, 3
6	$\{R(a)\}$	Res 5, 2
7	$\square$	Res 6, 4

- $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$ es inconsistente (p. 113).
  – $\mathsf{EH}_0(S) = \{\{P(a)\}, \{\neg P(f(a))\}\}$ es consistente
  $\mathcal{I} = \{P(a)\} \models \mathsf{EH}_0(S)$
  – $\mathsf{EH}_1(S) = \mathsf{EH}_0(S) \cup \{\{P(f(a))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}\}$ es inconsistente.

1	$\{P(f(a))\}$	
2	$\{\neg P(f(a))\}$	
3	$\square$	Res 1, 2

- $S = \{\{\neg P(x), Q(f(x), x)\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(y, z)\}\}$ es inconsistente. Dem.:
  $S' = \{\{\neg P(g(b)), Q(f(g(b)), g(b))\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(f(g(b)), g(b))\}\}$
  $\subset \mathsf{EH}(S)$
  es inconsistente.

1	$\{\neg P(g(b)), Q(f(g(b)), g(b))\}$	
2	$\{P(g(b))\}$	
3	$\{\neg Q(f(g(b)), g(b))\}$	
4	$\{Q(f(g(b)), g(b))\}$	Res 1, 2
5	$\square$	Res 3, 3

Bibliografía

1. M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 31–34.

2. C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 51–62.

3. M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 59–74.

4. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003) pp. 160–169.

5. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 47–50.

6. U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 70–78.

Tema 11

Resolución en lógica de primer orden

Contenido

11.1. Introducción 117

11.1.1. Ejemplos de consecuencia mediante resolución 117

11.2. Unificación 118

11.2.1. Unificadores 118

11.2.2. Composición de sustituciones 118

11.2.3. Comparación de sustituciones 119

11.2.4. Unificador de máxima generalidad 119

11.2.5. Algoritmo de unificación 120

11.3. Resolución de primer orden 122

11.3.1. Separación de variables 122

11.3.2. Resolvente binaria 123

11.3.3. Factorización 123

11.3.4. Demostraciones por resolución 124

11.3.5. Adecuación y completitud de la resolución 126

11.3.6. Decisión de no–consecuencia por resolución 127

11.1. Introducción

11.1.1. Ejemplos de consecuencia mediante resolución

- Ejemplo 1:
  $\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \exists x\ P(x)\} \models \exists x\ Q(x)$

se reduce a
$\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ es inconsistente.

Demostración:

1	$\{\neg P(x), Q(x)\}$	Hipótesis
2	$\{P(a)\}$	Hipótesis
3	$\{\neg Q(z)\}$	Hipótesis
4	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 2 con $\sigma = [x/a]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4 con $\sigma = [z/a]$

- Ejemplo 2:
  $\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \forall x\ [Q(x) \to R(x)]\} \models \forall x\ [P(x) \to R(x)]$
  se reduce a
  $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$
  es inconsistente.

  Demostración:

1	$\{\neg P(x), Q(x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg Q(y), R(y)\}$	Hipótesis
3	$\{P(a)\}$	Hipótesis
4	$\{\neg R(a)\}$	Hipótesis
5	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 3 con $\sigma = [x/a]$
6	$\{R(a)\}$	Resolvente de 2 y 5 con $\sigma = [y/a]$
5	$\square$	Resolvente de 4 y 6 con $\sigma = \epsilon$

11.2. Unificación

11.2.1. Unificadores

- Def.: La sustitución σ es un unificador de los términos t_1 y t_2 si $t_1\sigma = t_2\sigma$.
- Def.: Los términos t_1 y t_2 son unificables si tienen algún unificador.
- Def.: t es una instancia común de t_1 y t_2 si existe una sustitución σ tal que $t = t_1\sigma = t_2\sigma$.

- Ejemplos:

t_1	t_2	Unificador	Instancia común
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(z), y/z]$	$f(g(z), g(z))$
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(y), z/y]$	$f(g(y), g(y))$
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(a), y/a]$	$f(g(a), g(a))$
$f(x, y)$	$f(y, x)$	$[x/a, y/a]$	$f(a, a)$
$f(x, y)$	$f(y, x)$	$[y/x]$	$f(x, x)$
$f(x, y)$	$g(a, b)$	No tiene	No tiene
$f(x, x)$	$f(a, b)$	No tiene	No tiene
$f(x)$	$f(g(x))$	No tiene	No tiene

- Nota: Las anteriores definiciones se extienden a conjuntos de términos y de literales.

11.2.2. Composición de sustituciones

- Composición de sustituciones:
  - Def.: La composición de las sustituciones σ_1 y σ_2 es la sustitución $\sigma_1\sigma_2$ definida por $x(\sigma_1\sigma_2) = (x\sigma_1)\sigma_2$, para toda variable x.
  - Ejemplo: Si $\sigma_1 = [x/f(z, a), y/w]$ y $\sigma_2 = [x/b, z/g(w)]$, entonces
    - $x\sigma_1\sigma_2 = (x\sigma_1)\sigma_2 = f(z, a)\sigma_2 = f(z\sigma_2, a\sigma_2) = f(g(w), a)$
    - $y\sigma_1\sigma_2 = (y\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$
    - $z\sigma_1\sigma_2 = (z\sigma_1)\sigma_2 = z\sigma_2 = g(w)$
    - $w\sigma_1\sigma_2 = (w\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$

    Por tanto, $\sigma_1\sigma_2 = [x/f(g(w), a), y/w, z/g(w)]$.
- Def.: La substitución identidad es la sustitución ϵ tal que, para todo x, $x\epsilon = x$.
- Propiedades:
  1. Asociativa: $\sigma_1(\sigma_2\sigma_3) = (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$
  2. Neutro: $\sigma\epsilon = \epsilon\sigma = \sigma$.

11.2.3. Comparación de sustituciones

- Def.: La sustitución σ_1 es más general que la σ_2 si existe una sustitución σ_3 tal que $\sigma_2 = \sigma_1\sigma_3$. Se representa por $\sigma_2 \leq \sigma_1$.
- Def.: Las sustituciones σ_1 y σ_2 son equivalentes si $\sigma_1 \leq \sigma_2$ y $\sigma_2 \leq \sigma_1$. Se representa por $\sigma_1 \equiv \sigma_2$.

- Ejemplos: Sean $\sigma_1 = [x/g(z), y/z], \sigma_2 = [x/g(y), z/y]$ y $\sigma_3 = [x/g(a), y/a]$. Entonces,

  1. $\sigma_1 = \sigma_2[y/z]$
  2. $\sigma_2 = \sigma_1[z/y]$
  3. $\sigma_3 = \sigma_1[z/a]$
  4. $\sigma_1 \equiv \sigma_2$
  5. $\sigma_3 \leq \sigma_1$

- Ejemplo: $[x/a, y/a] \leq [y/x]$, ya que $[x/a, y/a] = [y/x][x/a, y/a]$.

11.2.4. Unificador de máxima generalidad

- Def.: La sustitución σ es un unificador de máxima generalidad (UMG) de los términos t_1 y t_2 si

  – σ es un unificador de t_1 y t_2.
  – σ es más general que cualquier unificador de t_1 y t_2.

- Ejemplos:

  1. $[x/g(z), y/z]$ es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
  2. $[x/g(y), z/y]$ es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
  3. $[x/g(a), y/a]$ no es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.

- Nota: Las anterior definición se extienden a conjuntos de términos y de literales.

11.2.5. Algoritmo de unificación

Unificación de listas de términos

- Notación de lista:

  - $(a_1, \dots, a_n)$ representa una lista cuyos elementos son $a_1, \dots, a_n$.
  - $(a|R)$ representa una lista cuyo primer elemento es a y resto es R.
  - $()$ representa la lista vacía.

- Unificadores de listas de términos:

  - Def.: σ es un unificador de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ si $s_1\sigma = t_1\sigma, \dots, s_n\sigma = t_n\sigma$.
  - Def.: $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ son unificables si tienen algún unificador.

- Def.: σ es un unificador de máxima generalidad (UMG) de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ si σ es un unificador de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ más general que cualquier otro.

- Aplicación de una sustitución a una lista de ecuaciones:
  - $(s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n)\sigma = (s_1\sigma = t_1\sigma, \dots, s_n\sigma = t_n\sigma)$.

Algoritmo de unificación de listas de términos

- Entrada: Lista de ecuaciones $L = (s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n)$ y sustitución σ.
- Salida: Un UMG de las listas $(s_1 \dots, s_n)\sigma$ y $(t_1 \dots, t_n)\sigma$, si son unificables;
  "No unificables", en caso contrario.
- Procedimiento $\mathsf{unif}(L, \sigma)$:
  1. Si $L = ()$, entonces $\mathsf{unif}(L, \sigma) = \sigma$.
  2. Si $L = (t = t|L')$, entonces $\mathsf{unif}(L, \sigma) = \mathsf{unif}(L', \sigma)$.
  3. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = f(t'_1 \dots, t'_m)|L')$, entonces
     $\mathsf{unif}(L, \sigma) = \mathsf{unif}((t_1 = t'_1, \dots, t_m = t'_m|L'), \sigma)$.
  4. Si $L = (x = t|L')$ (ó $L = (t = x|L')$) y x no aparece en t, entonces
     $\mathsf{unif}(L, \sigma) = \mathsf{unif}(L'[x/t], \sigma[x/t])$.
  5. Si $L = (x = t|L')$ (ó $L = (t = x|L')$) y x aparece en t, entonces
     $\mathsf{unif}(L, \sigma) =$ "No unificables".
  6. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = g(t'_1 \dots, t'_m)|L')$, entonces
     $\mathsf{unif}(L, \sigma) =$ "No unificables".
  7. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = f(t'_1 \dots, t'_p)|L')$ y $m \neq p$, entonces
     $\mathsf{unif}(L, \sigma) =$ "No unificables".

Algoritmo de unificación de dos términos

- Entrada: Dos términos t_1 y t_2.
- Salida: Un UMG de t_1 y t_2, si son unificables;
  "No unificables", en caso contrario.
- Procedimiento: $\mathsf{unif}((t_1 = t_2), \epsilon)$.

- Ejemplo 1: Unificar $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$:

$$\begin{array}{lll}
& \mathsf{unif}((f(x,g(z)) = f(g(y),x)),\epsilon) & \\
= & \mathsf{unif}((x = g(y), g(z) = x), \epsilon) & \text{por 3} \\
= & \mathsf{unif}((g(z) = x)[x/g(y)], \epsilon[x/g(y)]) & \text{por 4} \\
= & \mathsf{unif}((g(z) = g(y)), [x/g(y)]) & \\
= & \mathsf{unif}((z = y), [x/g(y)]) & \text{por 3} \\
= & \mathsf{unif}((), [x/g(y)][z/y]) & \text{por 4} \\
= & \mathsf{unif}((), [x/g(y), z/y]) & \\
= & [x/g(y), z/y] & \text{por 1}
\end{array}$$

- Ejemplo 2: Unificar $f(x, b)$ y $f(a, y)$:

$$\begin{array}{lll}
& \mathsf{unif}((f(x,b) = f(a,y)),\epsilon) & \\
= & \mathsf{unif}((x = a, b = y), \epsilon) & \text{por 3} \\
= & \mathsf{unif}((b = y)[x/a], \epsilon[x/a]) & \text{por 4} \\
= & \mathsf{unif}((b = y), [x/a]) & \\
= & \mathsf{unif}((), [x/a][y/b]) & \text{por 4} \\
= & [x/a, y/b]) & \text{por 1}
\end{array}$$

- Ejemplo 3: Unificar $f(x, x)$ y $f(a, b)$:

$$\begin{array}{lll}
& \mathsf{unif}((f(x,x) = f(a,b)),\epsilon) & \\
= & \mathsf{unif}((x = a, x = b), \epsilon) & \text{por 3} \\
= & \mathsf{unif}((x = b)[x/a], \epsilon[x/a]) & \text{por 4} \\
= & \mathsf{unif}((a = b), [x/a]) & \\
= & \text{“No unificable”} & \text{por 6}
\end{array}$$

- Ejemplo 4: Unificar $f(x, g(y))$ y $f(y, x)$:

$$\begin{array}{lll}
& \mathsf{unif}((f(x,g(y)) = f(y,x)),\epsilon) & \\
= & \mathsf{unif}((x = y, g(y) = x), \epsilon) & \text{por 3} \\
= & \mathsf{unif}((g(y) = x)[x/y], \epsilon[x/y]) & \text{por 4} \\
= & \mathsf{unif}((g(y) = y), [x/y]) & \\
= & \text{“No unificable”} & \text{por 5}
\end{array}$$

- Ejemplo 5: Unificar $j(w, a, h(w))$ y $j(f(x, y), x, z)$

$$\begin{array}{lll}
& \mathsf{unif}((j(w,a,h(w)) = j(f(x,y),x,z))\epsilon) & \\
= & \mathsf{unif}((w = f(x,y), a = x, h(w) = z), \epsilon) & \text{por 3} \\
= & \mathsf{unif}((a = x, h(w) = z)[w/f(x,y)], \epsilon[w/f(x,y)]) & \text{por 4} \\
= & \mathsf{unif}((a = x, h(f(x,y)) = z), [w/f(x,y)]) & \\
= & \mathsf{unif}((h(f(x,y)) = z)[x/a], [w/f(x,y)][x/a]) & \text{por 4} \\
= & \mathsf{unif}((h(f(a,y)) = z), [w/f(a,y), x/a]) & \\
= & \mathsf{unif}((), [w/f(a,y), x/a][z/h(f(a,y))]) & \text{por 4} \\
= & [w/f(a,y), x/a, z/h(f(a,y))] & \text{por 1}
\end{array}$$

- Ejemplo 6: Unificar $j(w, a, h(w))$ y $j(f(x, y), x, y)$

$$\begin{array}{lll} & \mathsf{unif}((j(w,a,h(w)) = j(f(x,y),x,y))\epsilon) & \\ = & \mathsf{unif}((w = f(x,y), a = x, h(w) = y), \epsilon) & \text{por } 3 \\ = & \mathsf{unif}((a = x, h(w) = y)[w/f(x,y)], \epsilon[w/f(x,y)]) & \text{por } 4 \\ = & \mathsf{unif}((a = x, h(f(x,y)) = y), [w/f(x,y)]) & \\ = & \mathsf{unif}((h(f(x,y)) = y)[x/a], [w/f(x,y)][x/a]) & \text{por } 4 \\ = & \mathsf{unif}((h(f(a,y)) = y), [w/f(a,y), x/a]) & \\ = & \text{“No unificable”} & \text{por } 5 \end{array}$$

- Ejemplo 7: Unificar $f(a, y)$ y $f(a, b)$:

$$\begin{array}{lll} & \mathsf{unif}((f(a,y) = f(a,b), \epsilon)) & \\ = & \mathsf{unif}((a = a, y = b), \epsilon) & \text{por } 3 \\ = & \mathsf{unif}((y = b), \epsilon) & \text{por } 2 \\ = & \mathsf{unif}((), [y/b]) & \text{por } 4 \\ = & [y/b] & \text{por } 1 \end{array}$$

11.3. Resolución de primer orden

11.3.1. Separación de variables

- Def.: La sustitución $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es un renombramiento si todos los t_i son variables.

- Prop.: Si θ es un renombramiento, entonces $C \equiv C\theta$.

- Def.: Las cláusulas C_1 y C_2 están separadas si no tienen ninguna variable común.

- Def.: Una separación de las variables de C_1 y C_2 es un par de renombramientos (θ_1, θ_2) tales que $C_1\theta_1$ y $C_2\theta_2$ están separadas.

- Ejemplo: Una separación de variables de

  $$C_1 = \{P(x), Q(x,y)\} \text{ y } C_2 = \{R(f(x,y))\}$$

  es

  $$(\theta_1 = [x/x_1, y/y_1], \theta_2 = [x/x_2, y/y_2]).$$

11.3.2. Resolvente binaria

- Def.: La cláusula C es una resolvente binaria de las cláusulas C_1 y C_2 si existen una separación de variables (θ_1, θ_2) de C_1 y C_2, un literal $L_1 \in C_1$, un literal $L_2 \in C_2$ y un UMG σ de $L_1\theta_1$ y $L_2^c\theta_2$ tales que

  $$C = (C_1\theta_1\sigma \setminus \{L_1\theta_1\sigma_1\}) \cup (C_2\theta_2\sigma \setminus \{L_2\theta_2\sigma\}).$$

- Ejemplo: Sean

  $C_1 = \{\neg P(x), Q(f(x))\}$, $C_2 = \{\neg Q(x), R(g(x))\}$,
  $L_1 = Q(f(x))$, $L_2 = \neg Q(x)$,
  $\theta_1 = [x/x_1]$, $\theta_2 = [x/x_2]$,
  $L_1\theta_1 = Q(f(x_1))$, $L_2^c\theta_2 = Q(x_2)$,
  $\sigma = [x_2/f(x_1)]$

  Entonces, $C = \{\neg P(x_1), R(g(f(x_1)))\}$ es una resolvente binaria de C_1 y C_2.

11.3.3. Factorización

- Def.: La cláusula C es un factor de la cláusula D si existen dos literales L_1 y L_2 en D que son unificables y $C = D\sigma \setminus \{L_2\sigma\}$ donde σ es un UMG de L_1 y L_2.

- Ejemplo: Sean

  $D = \{P(x,y), P(y,x), Q(a)\}$
  $L_1 = P(x,y)$
  $L_2 = P(y,x)$
  $\sigma = [y/x]$

  Entonces,

  $C = \{P(x,x), Q(a)\}$ es un factor de D.

Ejemplos de refutación por resolución

- Refutación de $S = \{\{\neg P(x, f(x,y))\}, \{P(a,z), \neg Q(z,v)\}, \{Q(u,a)\}\}$

1	$\{\neg P(x, f(x,y))\}$	Hipótesis
2	$\{P(a,z), \neg Q(z,v)\}$	Hipótesis
3	$\{Q(u,a)\}$	Hipótesis
4	$\{\neg Q(f(a,y), v)\}$	Resolvente de 1 y 2 con $\sigma = [x/a, z/f(a,y)]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4 con $\sigma = [u/f(a,y), v/a]$

- Refutación de $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$

1	$\{P(x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg P(f(x))\}$	Hipótesis
3	$\square$	Resolvente de 1 y 2 con con $\theta_1 = \epsilon, \theta_2 = [x/x'], \sigma = [x/f(x')]$

- Refutación de $S = \{\{P(x,y), P(y,x)\}, \{\neg P(u,v), \neg P(v,u)\}\}$

1	$\{P(x,y),P(y,x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg P(u,v),\neg P(v,u)\}$	Hipótesis
3	$\{P(x,x)\}$	Factor de 1 con $[y/x]$
4	$\{\neg P(u,u)\}$	Factor de 2 con $[v/u]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4 con $[x/u]$

11.3.4. Demostraciones por resolución

Demostraciones de cláusulas por resolución

- Sea S un conjunto de cláusulas.
- La sucesión $(C_1,\dots,C_n)$ es una demostración por resolución de la cláusula C a partir de S si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1,...,n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
  - $C_i \in S$;
  - existen $j,k < i$ tales que C_i es una resolvente de C_j y C_k
  - existe $j < i$ tal que C_i es un factor de C_j
- La cláusula C es demostrable por resolución a partir de S si existe una demostración por resolución de C a partir de S.
- Una refutación por resolución de S es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de S.
- Se dice que S es refutable por resolución si existe una refutación por resolución a partir de S.

Demostraciones de fórmulas por resolución

- Def.: Sean $S_1,\dots,S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1,\dots,F_n$ y S una forma clausal de $\neg F$. Una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1,\dots,F_n\}$ es una refutación por resolución de $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$.
- Def.: La fórmula F es demostrable por resolución a partir de $\{F_1,\dots,F_n\}$ si existe una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1,\dots,F_n\}$.
  Se representa por $\{F_1,\dots,F_n\} \vdash_{Res} F$.
- Ejemplo: (tema 8 p. 21) $\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \exists x\ P(x)\} \vdash_{Res} \exists x\ Q(x)$

1	$\{\neg P(x),Q(x)\}$	Hipótesis
2	$\{P(a)\}$	Hipótesis
3	$\{\neg Q(z)\}$	Hipótesis
4	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 2 con $[x/a]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4 con $[z/a]$

- Ejemplo: (tema 8 p. 21)
  $\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \forall x\ [Q(x) \to R(x)] \vdash_{Res} \forall x\ [P(x) \to R(x)]\}$

1	$\{\neg P(x), Q(x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg Q(y), R(y)\}$	Hipótesis
3	$\{P(a)\}$	Hipótesis
4	$\{\neg R(a)\}$	Hipótesis
5	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 3 con $[x/a]$
6	$\{R(a)\}$	Resolvente de 5 y 2 con $[y/a]$
5	$\square$	Resolvente de 6 y 4

- Ejemplo: (tema 6 p. 55) $\vdash_{Res} \exists x\ [P(x) \to \forall y\ P(y)]$

1	$\{P(x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg P(f(x))\}$	Hipótesis
3	$\square$	Resolvente de 1 y 2 con $\theta_2 = [x/x'], \sigma = [x/f(x')]$

- Ejemplo: $\vdash_{Res} \forall x\ \exists y\ \neg(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y))$
  – Forma clausal:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg\forall x\ \exists y\ \neg(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y)) \\
\equiv & \neg\forall x\ \exists y\ \neg((P(y,x) \to \neg P(y,y)) \land (\neg P(y,y) \to P(y,x))) \\
\equiv & \neg\forall x\ \exists y\ \neg((\neg P(y,x) \lor \neg P(y,y)) \land (\neg\neg P(y,y) \lor P(y,x))) \\
\equiv & \neg\forall x\ \exists y\ \neg((\neg P(y,x) \lor \neg P(y,y)) \land (P(y,y) \lor P(y,x))) \\
\equiv & \exists x\ \forall y\ \neg\neg((\neg P(y,x) \lor \neg P(y,y)) \land (P(y,y) \lor P(y,x))) \\
\equiv & \exists x\ \forall y\ ((\neg P(y,x) \lor \neg P(y,y)) \land (P(y,y) \lor P(y,x))) \\
\equiv_{sat} & \forall y\ ((\neg P(y,a) \lor \neg P(y,y)) \land (P(y,y) \lor P(y,a))) \\
\equiv & \{\{\neg P(y,a), \neg P(y,y)\}, \{P(y,y), P(y,a)\}\}
\end{array}
$$

  – Refutación:

1	$\{\neg P(y,a), \neg P(y,y)\}$	Hipótesis
2	$\{P(y,y), P(y,a)\}$	Hipótesis
3	$\{\neg P(a,a)\}$	Factor de 1 con $[y/a]$
4	$\{P(a,a)\}$	Factor de 2 con $[y/a]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4

Paradoja del barbero de Russell

En una isla pequeña hay sólo un barbero. El gobernador de la isla ha publicado la siguiente norma: *"El barbero afeita a todas las personas que no se afeitan a sí misma y sólo a dichas personas"*. Demostrar que la norma es inconsistente.
– Representación: $\forall x\ [\text{afeita}(b,x) \leftrightarrow \neg\text{afeita}(x,x)]$
– Forma clausal:

$$\begin{array}{ll} & \forall x\ [\text{afeita}(b,x) \leftrightarrow \neg\text{afeita}(x,x)] \\ \equiv & \forall x\ [(\text{afeita}(b,x) \to \neg\text{afeita}(x,x)) \wedge (\neg\text{afeita}(x,x) \to \text{afeita}(b,x))] \\ \equiv & \forall x\ [(\neg\text{afeita}(b,x) \vee \neg\text{afeita}(x,x)) \wedge (\neg\neg\text{afeita}(x,x) \vee \text{afeita}(b,x))] \\ \equiv & \forall x\ [(\neg\text{afeita}(b,x) \vee \neg\text{afeita}(x,x)) \wedge (\text{afeita}(x,x) \vee \text{afeita}(b,x))] \\ \equiv & \{\{\neg\text{afeita}(b,x), \neg\text{afeita}(x,x)\}, \{\text{afeita}(x,x), \text{afeita}(b,x)\}\} \end{array}$$

– Refutación:

1	$\{\neg\text{afeita}(b,x), \neg\text{afeita}(x,x)\}$	Hipótesis
2	$\{\text{afeita}(x,x), \text{afeita}(b,x)\}$	Hipótesis
3	$\{\neg\text{afeita}(b,b)\}$	Factor de 1 con $[x/b]$
4	$\{\text{afeita}(b,b)\}$	Factor de 2 con $[x/b]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4

11.3.5. Adecuación y completitud de la resolución

- Propiedades:
  - Si C es una resolvente de C_1 y C_2, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
  - Si D es un factor de C entonces $C \models D$.
  - Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
  - Si el conjunto de cláusulas S es refutable por resolución, entonces S es inconsistente.
- Teor.: El cálculo de resolución (para la lógica de primer orden sin igualdad) es adecuado y completo; es decir,

  Adecuado: $S \vdash_{Res} F \implies S \models F$

  Completo: $S \models F \implies S \vdash_{Res} F$

11.3.6. Decisión de no–consecuencia por resolución

- Enunciado: Comprobar, por resolución, que
  $\forall x\ [P(x) \vee Q(x)] \not\models \forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$.
- Reducción 1: Comprobar que es consistente
  $\{\forall x\ [P(x) \vee Q(x)],\ \neg(\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x))\}$
- Reducción 2: Comprobar que es consistente
  $\{\{P(x), Q(x)\}, \{\neg P(a)\}, \{\neg Q(b)\}\}$
- Resolución:

1	$\{P(x), Q(x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg P(a)\}$	Hipótesis
3	$\{\neg Q(b)\}$	Hipótesis
4	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 2
5	$\{P(b)\}$	Resolvente de 1 y 3

- Modelo: $U = \{a, b\}, I(P) = \{b\}, I(Q) = \{a\}$.

Bibliografía

1. Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1996) pp. 137–141.

2. M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 34–40.

3. C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 70–99.

4. M. Genesereth *Computational Logic (Chapter 9: Relational Resolution)* (Stanford University, 2003)

5. S. Hölldobler *Computational logic.* (U. de Dresden, 2004) pp. 71–74.

6. M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 138–164.

7. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 50–61.

8. U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 79–96.

Bibliografía

[1] L. Arenas *Lógica formal para informáticos.* (Ed. Díaz de Santos, 1996)

[2] C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal* (Ariel, 2000)

[3] M. Ben–Ari *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)

[4] R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998).

[5] C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving* (Academic Press, 1973).

[6] J. Cuena *Lógica Informática* (Alianza Ed., 1985)

[7] J.A. Díez *Iniciación a la Lógica* (Ed. Ariel, 2002)

[8] J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional*. (UNED, 2003)

[9] M. Fitting *First–Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1996)

[10] J.H. Gallier *Logic for computer science (foundations of automatic theorem Proving)* (June 2003)

[11] M. Genesereth *Computational Logic* (Stanford University, 2003)

[12] S. Hölldobler *Computational logic.* (U. de Dresden, 2004)

[13] Hortalá, M.T.; Leach, J. y Rogríguez, M. *Matemática discreta y lógica matemática* (Ed. Complutense, 1998)

[14] M. Huth y M. Ryan *Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems* (Cambridge University Press, 2000)

[15] M. Manzano y A. Huertas *Lógica para principiantes* (Alianza editorial, 2004)

[16] Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)

[17] R. Nieuwenhuis *Lógica de primer orden.* (U. Politénica de Cataluña, 2003)

[18] N.J. Nilsson *Inteligencia artificial (Una nueva síntesis)* (McGraw–Hill, 2001).

[19] M. Ojeda e I. Pérez de Guzmán *Lógica para la computación* (Ágora, 1997)

[20] E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)

[21] L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002)

[22] U. Schöning *Logic for Computer Scientists*, (Birkäuser, 1989)