Propiedades de las derivadas y problemas de optimización

Albert Gras i Martí
Teresa Sancho Vinuesa

PID_00183888

Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índice

Sobre estos materiales de trabajo

En este módulo veremos algunas aplicaciones básicas de las derivadas (cálculo de ritmos de cambio, puntos críticos, máximos y mínimos) para plantear a continuación los problemas de optimización, que son el núcleo de estos materiales.

1. Aplicación de las derivadas

Una de las aplicaciones importantes de las derivadas es la resolución de problemas de optimización (máximos y mínimos) y la representación gráfica de funciones. En primer lugar, repasaremos algunas ideas básicas sobre las derivadas.

1.1. Ritmo de cambio

Recordemos una de las propiedades más importantes de las derivadas: la derivada $f'(x)$ representa el ritmo de cambio de la función $f(x)$.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^2 - 1$ es una parábola que mira arriba porque el signo del término cuadrático es positivo, y que tiene el vértice en $x = 0$. La función vale $f(0) = -1$ en el mínimo. Sabemos, pues, que la función decrece hasta $x = 0$ y crece a partir de este punto. Observad que la derivada de la función en este punto es 0: $f'(x) = 2x = 0$ si $x = 0$. Esto quiere decir que la pendiente de la recta tangente a la curva en este punto es 0 y, por lo tanto, la recta tangente es una función constante, $y = -1$.

Veamos algunos ejemplos más.

A1

Determinad todos los puntos en los que la función siguiente no varía:

$$g(x) = 5 - 6x - 10\cos(2x)$$

Ayuda: la función permanece constante si el ritmo de cambio es nulo. Encontrad los puntos en los que la derivada de la función se anula.

A2

Determinad cuándo es creciente la función siguiente:

$$A(t) = 27t^5 - 45t^4 - 130t^3 + 150$$

Ayuda: si la derivada (es decir, la pendiente) de una función es positiva, la función es creciente. Si la derivada es negativa, la función es decreciente.

1.2. Puntos críticos

Decimos que $x = c$ es un punto crítico de la función $f(x)$ si $f(c)$ existe y, además, se cumple que la derivada de la función, calculada en este punto, se anula:

$$f'(c) = 0$$

O bien no existe:

$$f'(c) \text{ no existe.}$$

Es importante subrayar que hace falta que $f(c)$ exista para que podamos decir que $x = c$ es un punto crítico de la función.

A3

Determinad los puntos críticos de la función siguiente:

$$f(x) = 6x^5 + 33x^4 - 30x^3 + 100$$

Hagamos un ejercicio en el que la derivada no existe en un punto.

A4

Determinad los puntos críticos de la función siguiente:

$$g(t) = \sqrt[3]{t^2}\,(2t - 1)$$

Como hemos visto, hay que manipular la expresión de la derivada para que sea fácil ver si la derivada no existe o se anula en algún punto.

Veamos dos ejercicios más, que también sirven para repasar las derivadas.

A5

Determinad los puntos críticos de las funciones siguientes:

a) $h(t) = 10te^{3-t^2}$

b) $f(x) = x^2 \ln(3x) + 6$

Ayuda: no olvidéis que es preciso que la función exista en el punto para que sea un punto crítico.

También puede haber funciones que no tengan puntos críticos. Veamos un ejemplo de esto:

A6

Determinad los puntos críticos de la función siguiente:

$$f(x) = xe^{x^2}$$

1.3. Máximos y mínimos

El cálculo de los valores máximos y mínimos de una función tiene muchas aplicaciones en problemas de ingeniería. Tiene mucho interés, por lo tanto, estudiar cómo se tienen que calcular los extremos de una función.

Es importante distinguir entre dos tipos de máximos y mínimos de una función:

1) Decimos que $f(x)$ tiene un máximo absoluto (o global) en $x = c$ si $f(x) \leq f(c)$ para cualquier valor de x del dominio en el que trabajamos.

2) Decimos que $f(x)$ tiene un máximo relativo (o local) en $x = c$ si $f(x) \leq f(c)$ en algún intervalo abierto alrededor de $x = c$.

3) Decimos que $f(x)$ tiene un mínimo absoluto (o global) en $x = c$ si $f(x) \geq f(c)$ para cualquier valor de x del dominio en el que trabajamos.

4) Decimos que $f(x)$ tiene un mínimo relativo (o local) en $x = c$ si $f(x) \geq f(c)$ en algún intervalo abierto alrededor de $x = c$.

Cuando hablamos de que hay un intervalo abierto alrededor de $x = c$ nos referimos al hecho de que podemos encontrar algún intervalo (a, b) que no incluya los puntos extremos, tal que $a < c < b$. Dicho de otro modo, c está dentro del intervalo y no coincide con ninguno de los extremos.

Los puntos máximos o mínimos de una función se denominan **puntos extremos** de la función, y distinguimos entre *extremos relativos* y *extremos absolutos*.

Hablamos de máximos absolutos (o mínimos absolutos) en $x = c$ si $f(c)$ es el valor más grande (o el más pequeño) que puede tomar la función en el dominio en el que trabajamos.

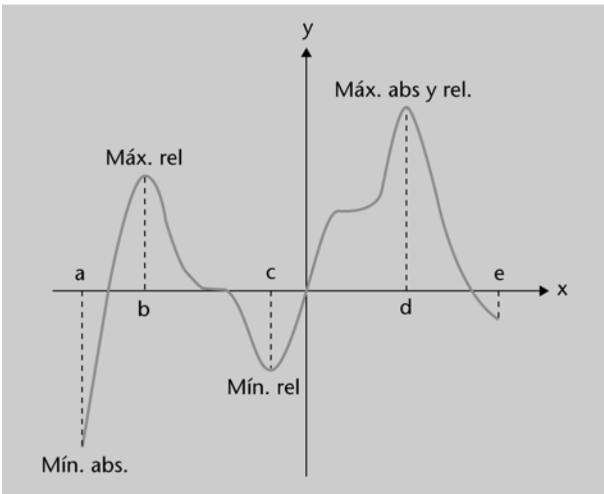
Hablamos de dominio en el que trabajamos porque en cada caso nos puede interesar trabajar con algún conjunto de valores de la variable x, que no tienen por qué ser todos los valores posibles del dominio de la función.

Los valores máximos o mínimos relativos de una función en $x = c$ lo son para algún intervalo abierto alrededor de $x = c$. Puede haber valores más grandes o más pequeños de la función en algún otro intervalo, pero relativos a $x = c$, o localmente en $x = c$, $f(c)$ es mayor o menor que todos los otros valores de la función que están cerca.

Para ver si un punto es extremo relativo tenemos que poder ver qué valor toma la función a los dos lados del punto $x = c$.

En la figura 1 mostramos una función que tiene varios extremos en el intervalo $[a, e]$.

Figura 1. Máximos y mínimos absolutos y relativos de una función



En la figura 1 vemos que la función tiene máximos relativos en $x = b$ y $x = d$, porque están en el interior del dominio que se muestra, y son los valores más grandes de la función para un intervalo determinado alrededor del punto.

También tenemos un mínimo relativo en $x = c$ porque este punto es interior en el dominio y es el punto más pequeño de la gráfica en un intervalo alrededor del punto. El punto del extremo del intervalo $x = e$ no es un mínimo relativo porque no hay puntos mayores que e.

La función tiene un máximo absoluto en $x = d$ y un mínimo absoluto en $x = a$. Estos dos son los puntos en los que la función toma el valor mayor y menor.

Hagamos un ejercicio.

A7

Representad gráficamente e identificad los extremos absolutos y relativos de la función siguiente:

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [-1, 2]$$

Por lo tanto, una función no tiene por qué tener extremos relativos. Veamos otro caso.

A8

Representad gráficamente e identificad los extremos absolutos y relativos de la función siguiente:

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [-2, 2]$$

Por lo tanto, una función puede tener diferentes puntos donde la función tenga un máximo absoluto y/o un mínimo absoluto.

A9

Representad gráficamente e identificad los extremos absolutos y relativos de la función siguiente:

$$f(x) = x^2$$

Por lo tanto, una función puede tener mínimos y no tener máximos, o al revés.

A10

Representad gráficamente e identificad los extremos absolutos y relativos de la función siguiente:

$$f(x) = x^3 \qquad x \in [-2, 2]$$

Por lo tanto, una función puede no tener ningún tipo de extremos relativos.

A11

Identificad los extremos absolutos y relativos de la función siguiente:

$$f(x) = x^3$$

Así pues, una función puede no tener ningún tipo de puntos extremos, ni absolutos ni relativos.

A12

Identificad los extremos absolutos y relativos de la función siguiente:

$$f(x) = \cos x$$

Como hemos visto, una función puede tener infinitos extremos relativos.

A través de varios ejemplos han visto que los extremos absolutos tienen propiedades interesantes. Las funciones que hemos considerado en los ejemplos anteriores eran funciones **continuas**. Cada vez que hemos restringido el dominio a un intervalo cerrado (es decir, un dominio que contiene los puntos extremos), hemos obtenido mínimos y máximos absolutos. También hemos visto un ejemplo en el que no hemos restringido el dominio y hemos obtenido un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

Estas observaciones ayudan a comprender el significado del teorema llamado *teorema del valor extremo*.

Teorema del valor extremo: si una función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces hay dos números c y d dentro de este intervalo ($a \leq c$ y $d \leq b$) tales que $f(c)$ es un máximo absoluto para la función y $f(d)$ es un mínimo absoluto de la función.

Así pues, si tenemos una función continua en un intervalo $[a, b]$ podemos garantizar que tenemos tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto de la función en algún punto del intervalo. El teorema no nos dice dónde se encontrarán o si habrá más de uno.

A13

Aplicad el teorema anterior a la función siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad x \in [-1, 1]$$

Por lo tanto, si el teorema del valor extremo no es aplicable, no podemos decir nada sobre los extremos absolutos de la función. Se puede dar el caso de que la función no tenga máximo absoluto (es el caso de la función de la actividad A13) o no tenga mínimo absoluto. Antes de empezar a ver aplicaciones de las derivadas, nos resultará útil otro teorema, que se denomina *de Fermat*.

Teorema de Fermat: si una función $f(x)$ tiene un extremo relativo en $x = c$ y $f'(c)$ existe, entonces $x = c$ es un punto crítico de la función $f(x)$. Además, en este punto crítico $f'(c) = 0$.

El teorema de Fermat nos dice que hay una relación entre los extremos relativos y los puntos críticos. De hecho, nos permite obtener una lista de todos los extremos relativos posibles. Puesto que un extremo relativo debe ser un punto crítico, la lista de todos los puntos críticos (puntos donde la derivada de la función es 0 o no existe) nos dará una lista de todos los extremos posibles.

Por ejemplo, hemos visto en el ejercicio A9 que la función $f(x) = x^2$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$. Por lo tanto, de acuerdo con el teorema de Fermat $x = 0$ tiene que ser un punto crítico. La derivada de la función es:

$$f'(x) = 2x$$

Y ciertamente, como sabemos del ejercicio A9, $x = 0$ es un punto crítico.

Aun así, no se tiene que usar el teorema de manera incorrecta. El teorema no dice que un punto crítico es un punto extremo. Podemos verlo con un ejemplo.

A14

Comprobad la afirmación anterior para la función:

$$f(x) = x^3$$

en el punto $x = 0$.

Efectivamente, en $x = 0$ la función tiene un punto crítico (derivada igual a cero), pero no es ni un mínimo ni un máximo relativo.

Observemos también que este teorema no dice nada sobre extremos absolutos. Un extremo absoluto puede ser, o no, un punto crítico.

1.4. Cálculo de extremos absolutos

Una de las aplicaciones más importantes de las derivadas es el cálculo de los extremos absolutos de una función. Supongamos que la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$.

El teorema del valor extremo nos dice que puesto que suponemos que la función es continua y trabajamos en un intervalo cerrado, podemos encontrar aquí los extremos.

Hemos visto también en las actividades anteriores que no son otra cosa que los valores mayor y menor que pueden tener. Por lo tanto, debemos obtener la lista de extremos absolutos posibles y comprobar cuáles de estos dan los valores de la función que sean el más grande o el más pequeño.

Por lo tanto, el procedimiento para encontrar los extremos absolutos de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es:

1) Verificar que la función es continua en el intervalo $[a, b]$.

2) Encontrar todos los puntos críticos de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

3) Evaluar la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo.

4) Identificar los extremos absolutos de la función (sólo hay que observar en qué punto o en qué puntos la función toma el valor más grande y en qué punto o en qué puntos toma el valor más pequeño).

A15

Determinad los extremos absolutos de la función siguiente:

$$g(t) = 2t^3 + 3t^2 - 12t + 4 \qquad t \in [-4, 2]$$

Como hemos visto, los extremos absolutos pueden estar en puntos críticos o también en los extremos del intervalo. Frecuentemente podemos descuidarnos de comprobar qué pasa en los extremos del intervalo que consideramos. ¡Hay que recordarlo!

A16

Determinad los extremos absolutos de la función siguiente:

$$g(t) = 2t^3 + 3t^2 - 12t + 4 \qquad t \in [0, 2]$$

Por lo tanto, el intervalo en el que consideremos el problema puede modificar las soluciones. Veamos un caso más complicado.

A17

Supongamos que la población (en miles de unidades) de un insecto después de t meses viene dada por la función siguiente:

$$P(t) = 3t + \sin(4t) + 100$$

Determinad su población máxima y mínima durante los primeros cuatro meses.

El ejemplo anterior muestra que hay que tener cuidado con las soluciones de las ecuaciones trigonométricas: se debe incluir el término $2\pi n$. Además, hay que trabajar con la suficiente precisión. En el caso anterior, si hubiéramos redondeado $111.7 \approx 112$ y $111.9 \approx 112$, parecería que había dos poblaciones máximas, y sólo hay una.

A18

Supongamos que la cantidad de dinero que tenemos en el banco al cabo de t años es:

$$A(t) = 2\,000 - 10te^{5-\frac{t^2}{8}}$$

Determinad el valor mínimo y máximo de dinero durante los primeros 10 años.

Como hemos visto, es importante incluir los extremos del intervalo de interés.

Los puntos críticos anteriores son consecuencia de la anulación de la derivada. A veces aparecen puntos críticos porque la derivada no es continua. Veámoslo.

A19

Determinad los extremos absolutos de la función siguiente:

$$Q(y) = 3y(y+4)^{2/3} \qquad y \in [-5, -1]$$

Por lo tanto, si hubiéramos olvidado el punto crítico de la función en el que no hay derivada, $y = -4$, no habríamos obtenido el resultado correcto.

En conclusión, podemos utilizar la derivada para identificar los extremos absolutos de una función. Estos se obtienen de los puntos en los que la derivada se anula o de los puntos en los que no existe.

Además, cuando la derivada de una función es positiva la función es creciente, y en los intervalos en los que la derivada es negativa la función es decreciente. Podemos ver un ejemplo.

A20

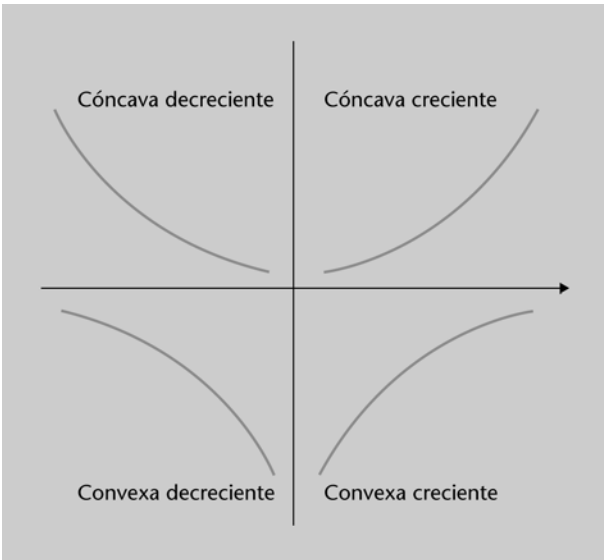
Encontrad los puntos críticos de la función siguiente, y los intervalos en los que la función es creciente o decreciente. Haced también un esquema de esto.

$$g(t) = t\sqrt[3]{t^2 - 4}$$

1.5. Significado geométrico de la segunda derivada: concavidad y convexidad

Hemos visto que la primera derivada de una función da información sobre la gráfica de la función: crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos. La segunda derivada también nos la da. Se trata del concepto de concavidad y convexidad de una función, relacionado con la segunda derivada, y se muestra en la figura 2.

Figura 2. Curvas cóncavas y convexas



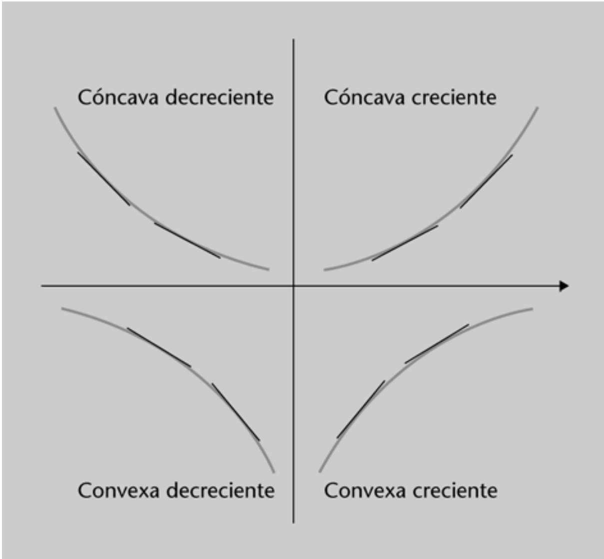
Una función es **cóncava** si *se abre* o *mira hacia arriba* y es **convexa** si *se abre* o *mira hacia abajo*. La concavidad/convexidad no tiene nada que ver con el crecimiento o decrecimiento: una función puede ser cóncava o convexa y ser creciente o decreciente.

Podemos dar una definición más precisa de concavidad/convexidad:

Decimos que una función $f(x)$ es **cóncava** (**convexa**) en un intervalo $[a, b]$ si todas las tangentes a la curva en este intervalo están por debajo (por encima) de la gráfica de la función.

La figura 3 muestra que la definición anterior está de acuerdo con lo que hemos dicho sobre la figura 2.

Figura 3. Definición de concavidad/convexidad en términos de tangentes a la función



En la gráfica superior, por ejemplo, todas las líneas tangentes están por debajo de la curva y por esto es cóncava.

A veces una función presenta concavidad y convexidad en intervalos diferentes. Los puntos de transición de un tipo de curvatura al otro se denominan *puntos de inflexión*.

> Un punto $x = c$ se denomina *punto de inflexión de la función* si la función es continua en este punto y si hay un cambio de concavidad a convexidad o al revés.

Recordad que en la actividad A14 veíamos que la función $f(x) = x^3$ tenía un punto crítico en el punto $x = 0$, pero que no era ni un mínimo ni un máximo relativo. Si observamos la representación gráfica, nos damos cuenta de que la función mira abajo a la izquierda de 0 y mira arriba a la derecha de este punto. El punto $x = 0$ es pues un punto de inflexión.

Otra manera de definir la concavidad/convexidad de una función es a partir de la segunda derivada de la función.

> Dada una función $f(x)$, si $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) para todos los puntos x de un intervalo I, entonces decimos que la función $f(x)$ es cóncava (convexa) en I.

Por lo tanto, los posibles puntos de inflexión de una función son aquellos en los que la segunda derivada es cero o no existe. Sin embargo, para que sea un punto de inflexión es necesario comprobar que hay un cambio de concavidad a los dos lados del punto.

Es fácil recordar el criterio de máximo/mínimo y de concavidad/convexidad. Pensemos en la parábola más sencilla:

$$y = x^2$$

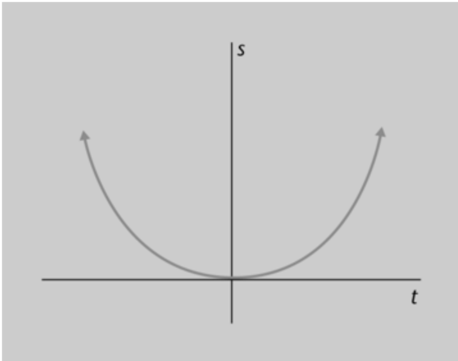
La gráfica es sencilla: se anula en el punto $x = 0$ y para todo x es positiva, con dos ramas que divergen para puntos x grandes.

La primera derivada de la función es:

$$y' = 2x$$

La pendiente de la función es negativa (función decreciente) para $x < 0$, y positiva (función creciente) para $x > 0$.

Figura 4. Esquema de una parábola tipo $y = Ax^2$ con $A > 0$



La primera derivada se anula en $x = 0$. Por lo tanto, tenemos un extremo en $x = 0$. Por la forma de la gráfica sabemos que se trata de un mínimo, pero lo podemos comprobar con la segunda derivada:

$$y'' = 2$$

que es positiva en $x = 0$ (y para cualquier valor de x). La función es, pues, cóncava.

A21

Demostrad que

$$y = -x^2$$

es una función convexa y tiene un máximo en $x = 0$.

Por lo tanto, la segunda derivada sirve para clasificar los puntos críticos.

Si $x = c$ es un punto crítico de $f'(c)$ de manera que $f'(c) = 0$, y $f''(x)$ es continua alrededor de $x = c$, entonces:

- Si $f''(c) < 0$ (si $f''(c) > 0$) $x = c$ es un máximo (mínimo) relativo.
- Si $f''(c) = 0$ $x = c$ puede ser un máximo relativo, un mínimo relativo, un punto de inflexión.

Es decir, si la segunda derivada es nula entonces el punto crítico puede ser cualquier cosa.

A22

Aplicad el test anterior a las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^4$

b) $f(x) = -x^4$

c) $f(x) = x^3$

2. Optimización

En matemáticas, la optimización se ocupa de resolver problemas en los que el objetivo es encontrar "el más grande" o "el más pequeño" entre un conjunto de elementos. La tipología de problemas y los procedimientos para resolverlos son muy diversos. En este curso daremos las pautas para resolver problemas que equivalen a determinar el máximo o el mínimo de una función de una variable.

En un problema de optimización se trata de encontrar cuál es el valor más grande o más pequeño que puede tomar una función.

Ya hemos visto un tipo de problema de optimización: el cálculo de los extremos absolutos de una función, es decir, los valores más grandes y más pequeños que puede tomar la función en un intervalo concreto.

En esta sección veremos otro tipo de problemas de optimización: buscar los valores más grandes y más pequeños de una función sometida a algún tipo de restricción. La restricción será alguna condición, que habitualmente describiremos con una ecuación que deberán cumplir las soluciones del problema.

Hay que tener mucho cuidado al identificar en cada caso cuál es la magnitud que queremos optimizar y cuál es la expresión que impone la restricción.

Lo mejor es referirnos a ejemplos concretos. Empezaremos por uno sencillo.

A23

Queremos cerrar un campo rectangular con una valla. Un edificio ocupa uno de los lados largos del rectángulo y aquí no hay que poner valla. ¿Cuál es el área máxima del campo que podemos cerrar con 200 m de valla?

Haced un esquema del problema y plantead y resolved las ecuaciones correspondientes.

Ayuda: plantead una ecuación para el área del campo (que queremos maximizar) y otra para la longitud de la valla (que tiene un valor total prefijado). Reducid el problema a una sola incógnita, y maximizad la función correspondiente.

El procedimiento que hemos seguido en la actividad anterior es el que seguiremos siempre de manera parecida. En este tipo de problemas es fundamental establecer la función que queremos maximizar, así como las restricciones del problema.

Veamos cómo una ligera modificación en las restricciones da una solución muy diferente al problema.

A24

Hagamos el mismo problema A23 pero sin la presencia del edificio. Es decir, supongamos que queremos hacer una valla rectangular de la superficie máxima, de manera que todo el perímetro de la valla sea 200 m.

Como veíamos en la actividad anterior, la solución es ahora un cuadrado, no un rectángulo.

A veces habrá que confirmar si los puntos críticos que hemos obtenido son máximos o mínimos; para ello se puede utilizar el método de la segunda derivada, que ya hemos visto en la sección 1.5. Veamos un ejemplo.

A25

Queremos construir una caja que tenga una base tres veces más larga que ancha. El material que se usa para construir la parte superior e inferior de la caja cuesta 100 €/m^2, y el que se usa para los lados cuesta 50 €/m^2. Si la caja debe tener un volumen de 2 m^3, ¿con qué dimensiones se minimizan los costes?

Ayuda: eliminad la variable altura del problema para minimizar la función resultante.

Como hemos visto en los ejemplos anteriores, se tiene que reducir el problema de dos o más variables a una sola variable. Hace falta un poco de práctica para saber qué variable conviene eliminar. Veamos un ejemplo.

A26

Repetid el problema del ejemplo A25 pero eliminad la variable anchura, a, en lugar de la altura, h.

¿Se simplifica la resolución del problema?

Los problemas que se resuelven por optimización a veces tienen soluciones que carecen de sentido, y hay que descartarlas. Veamos un ejemplo.

A27

Queremos construir una caja de base cuadrada con 10 m^2 de material y que tenga un volumen máximo cuando usamos todo el material.

En los dos ejemplos anteriores hemos tenido situaciones opuestas. En el A25 el volumen era la restricción y el área (o el coste) era la función que queríamos optimizar. En el A27, por otro lado, queremos optimizar el volumen y la restricción era el área de la caja.

Por lo tanto, hay que estar muy atentos a cuál es la función y cuál es la restricción en cada problema de optimización.

Veamos otro ejemplo.

A28

Queremos construir un envase cilíndrico de 1,5 l de volumen. ¿Qué dimensiones debe tener para que la cantidad de material que se usa sea mínima?

Nota: para comprobar que se trata de un mínimo de la función, usad dos métodos, el método de la segunda derivada y el método de calcular el valor de la función o de la derivada alrededor del punto crítico.

En los ejemplos anteriores hemos trabajado con constantes numéricas concretas. Sin embargo, no hay que perder de vista que en matemáticas trabajamos a menudo con datos que son letras, no valores concretos, y así obtenemos valores más generales. Veamos un ejemplo.

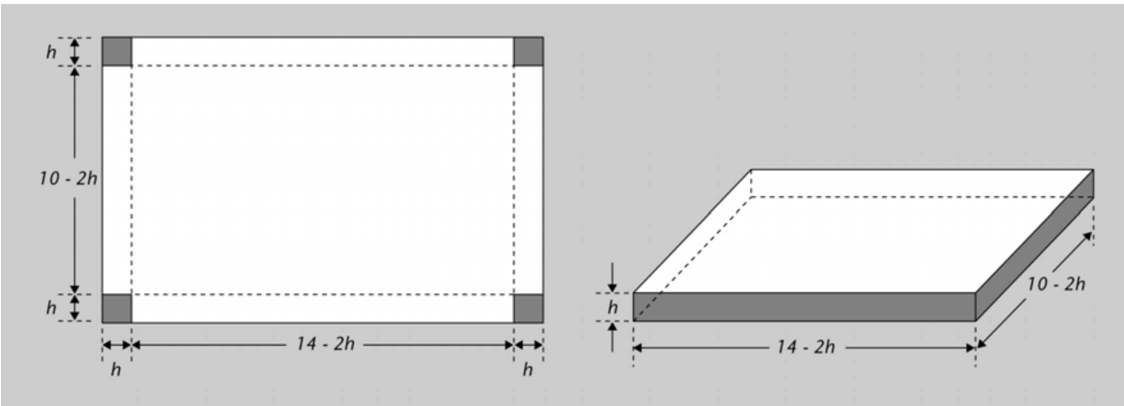
A29

Demostrad que para un volumen concreto V, la cantidad de material que se utiliza al construir un receptáculo cilíndrico es mínima si $h = 2r$, es decir, la altura del cilindro coincide con el diámetro de la base cilíndrica, independientemente del volumen del envase.

A veces la restricción del problema no se puede escribir en forma de ecuación, como vemos en el ejemplo siguiente.

A30

Tenemos un trozo de cartón de 14 cm × 10 cm y queremos cortar los lados para hacer una caja, como muestra la figura siguiente. Determinad la altura de la caja que maximizará el volumen.



Hemos hecho varios ejercicios en los que la condición estaba expresada en forma de área y la función que maximizábamos era un volumen, o al revés. En el ejercicio siguiente, tanto la condición como la función que maximizaremos son dos áreas.

A31

Queremos hacer un póster de 400 cm^2 de área total y con 2 cm de márgenes laterales, 3 cm de margen superior y 2,5 cm de margen inferior. ¿Qué dimensiones darán el área impresa más grande?

Hagamos un ejercicio parecido.

A32

La parte baja de una ventana es rectangular y la superior es un semicírculo. Si tenemos 12 m de material para hacerla (material del perímetro de la ventana), ¿qué dimensiones debe tener para que deje entrar el máximo de luz?

Y otro, pero ahora con valores numéricos.

A33

Determinad el área del rectángulo más grande que se pueda inscribir en un círculo de radio 4.

En general, hay que encontrar todos los puntos críticos y ver cuáles son aceptables en cada caso, como ahora veremos.

A34

Determinad los puntos sobre $y = x^2 + 1$ que están más cerca del punto (0, 2).

Nota: al resolver el problema, eliminad la variable *y* para trabajar con una función sólo de x.

A veces, el camino que parece más corto no lo es. Veamos la actividad siguiente.

A35

Repetid la actividad A34 pero ahora eliminad la variable *x* en lugar de la *y*.

Con el ejemplo anterior, hemos visto una buena compilación de problemas de optimización que nos dan una idea de las dificultades que se pueden presentar.

Recapitulación

A36

Elaborad un esquema que resuma el procedimiento para calcular los máximos y mínimos de una función en un intervalo [a, b].

Resolución de actividades

A1

En primer lugar, calculamos la derivada de la función,

$$g'(x) = -6 + 20\sin(2x)$$

La función no cambia cuando el ritmo de cambio es nulo,

$$g'(x) = 0$$

es decir,

$$-6 + 20\sin(2x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2x) = 0.3 \Rightarrow \quad 2x = \arcsin(0.3)$$

La solución es,

$$2x = 0.3047 + 2\pi n \quad \text{o bien} \quad 2x = \pi - 0.3047 + 2\pi n = 2.8369 + 2\pi n \qquad \text{con} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$$

Y respecto a la variable x,

$$x = 0.1524 + \pi n \quad \text{o bien} \quad x = 1.4185 + \pi n \quad \text{con} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$$

A2

Primero, derivamos la función,

$$A'(t) = 135t^4 - 180t^3 - 390t^2 = 15t^2\left(9t^2 - 12t - 26\right)$$

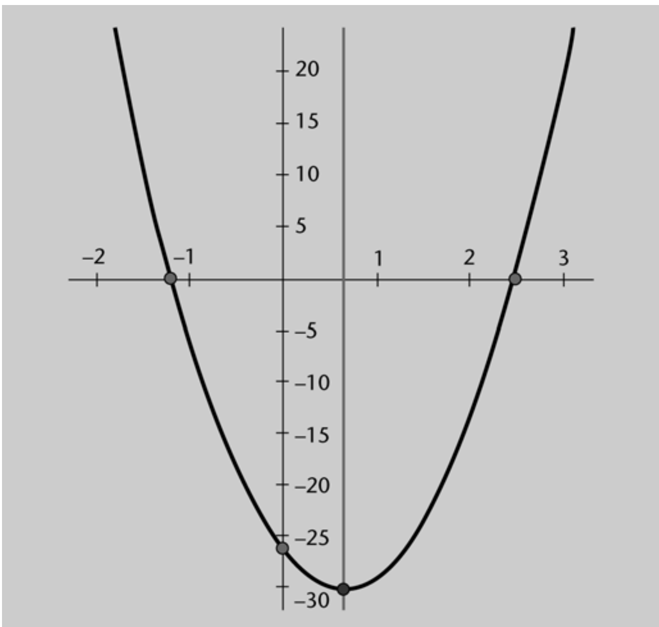
y vemos en qué momento no varía la función,

$$A'(t) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times 9 \times (-26)}}{18} = \dfrac{2 \pm \sqrt{30}}{3} = \begin{cases} -1.159 \\ 2.492 \end{cases} \end{cases}$$

La función no varía en tres puntos. Para observar en qué momento la función es creciente o decreciente, hemos de determinar en qué lugar la derivada es positiva o negativa: si la derivada es positiva, la función es creciente, y si la derivada es negativa, la función es decreciente.

En $A'(t)$, el factor $15t^2$ no cambia de signo para ningún valor de t. El otro factor, $9t^2 - 12t - 26$ corta el eje x en dos puntos, y es positivo para valores muy altos de t, tanto $t > 0$ como $t < 0$ y altos.

Y para valores próximos a cero, la función es negativa porque el término -26 domina sobre los otros dos, $9t^2 - 12t$. (Podéis probar con un valor como $t = 0.001$). La función $9t^2 - 12t - 26$ es, pues, una parábola cuyas líneas se van al infinito.



Creciente: $-\infty < t < -1.159 \qquad 2.492 < t < \infty$

Decreciente: $-1.159 < t < 2.492$

A3

Calculamos la derivada de la función,

$$f'(x) = 30x^4 + 132x^3 - 90x^2 = 6x^2(5x-3)(x+5)$$

Como la función y su derivada son polinomios, existirán para todos los valores de x. Los únicos puntos críticos serán los que anulen la derivada,

$$6x^2(5x-3)(x+5) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -5, \quad 0, \quad 5/3$$

A4

En este caso, es más sencillo calcular la derivada si operamos primero,

$$g(t) = 2t^{5/3} - t^{2/3}$$

y derivamos,

$$g'(t) = \frac{10}{3}t^{2/3} - \frac{2}{3}t^{-1/3} = \frac{10t^{2/3}}{3} - \frac{2}{3t^{1/3}}$$

Vemos que $t = 0$ es un punto crítico de la función porque $g'(0)$ no existe, pero $g(0)$ sí.

Los otros puntos críticos posibles surgen de obtener $g'(t) = 0$,

$$g'(t) = \frac{10t^{2/3}}{3} - \frac{2}{3t^{1/3}} = \frac{10t-2}{3t^{1/3}} = 0$$

En esta última forma vemos que $t = 0$ es un punto crítico, como ya sabemos, y además $10t = 2$, o sea, $t = 1/5$.

A5

a)

$$h'(t) = 10\mathrm{e}^{3-t^2} + 10t\mathrm{e}^{3-t^2}(-2t) = 10\mathrm{e}^{3-t^2} - 20t^2\mathrm{e}^{3-t^2} = 10\mathrm{e}^{3-t^2}\left(1-2t^2\right)$$

Tanto la función como su derivada son exponenciales multiplicadas por polinomios, por tanto, existen para cualquier valor de t.

El exponencial no se anula en ningún punto, por lo tanto, la única posibilidad para que la derivada se anule es:

$$1 - 2t^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) La función sólo existe para $x > 0$. Veamos cual es el dominio de su derivada y cuando se anula:

$$f'(x) = 2x\ln(3x) + x^2\frac{1}{x} = x\left(2\ln(3x)+1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln(3x) = -1/2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}e^{-1/2} \end{cases}$$

Desestimamos $x = 0$ porque no es del dominio de la función. Puesto que el dominio de la derivada coincide con el de la función, el único punto crítico es $x = \frac{1}{3}e^{-1/2}$.

A6

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x^2} + x\mathrm{e}^{x^2}(2x) = \mathrm{e}^{x^2}\left(1+2x^2\right)$$

La derivada no se anula para ningún valor real de x; por lo tanto, la función no tiene puntos críticos.

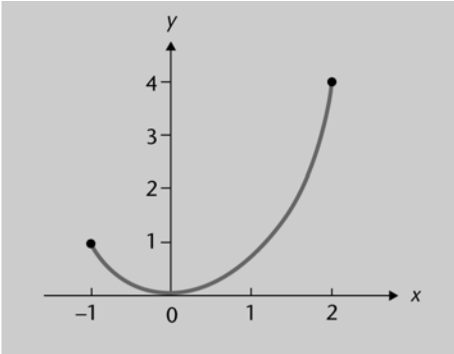
A7

La siguiente figura muestra la grafica de la función en el dominio indicado. Hemos dibujado puntos gruesos en los extremos de la gráfica para indicar dónde se acaba.

Tenemos un mínimo relativo y absoluto de valor f(0)=0 en el punto $x = 0$ y un máximo absoluto de valor f(2)=4 en el punto $x = 2$.

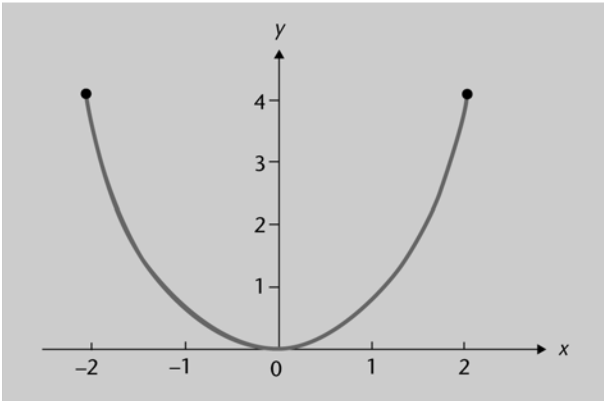
El punto $x = -1$ no es un máximo relativo porque es un punto extremo del intervalo.

La función no tiene ningún máximo relativo.



A8

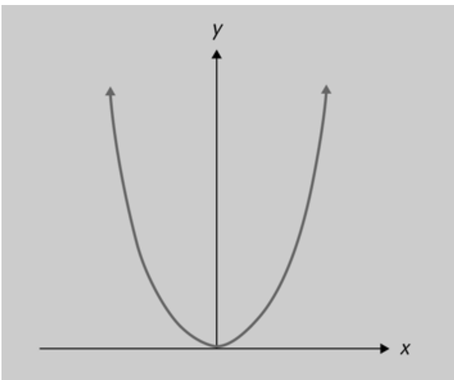
La gráfica de la función muestra que tiene un valor mínimo absoluto y relativo en $x = 0$. También tenemos un máximo absoluto de valor 4 en los dos puntos extremos del dominio, $x = -2$ y 2. Esta función tampoco tiene máximos relativos.



A9

No aparece el dominio de la función, por lo tanto, hemos de tomar el mayor posible. En este caso serían todos los números reales. La gráfica muestra que la función crece sin límites en los dos extremos, por lo que no tiene máximos absolutos ni relativos.

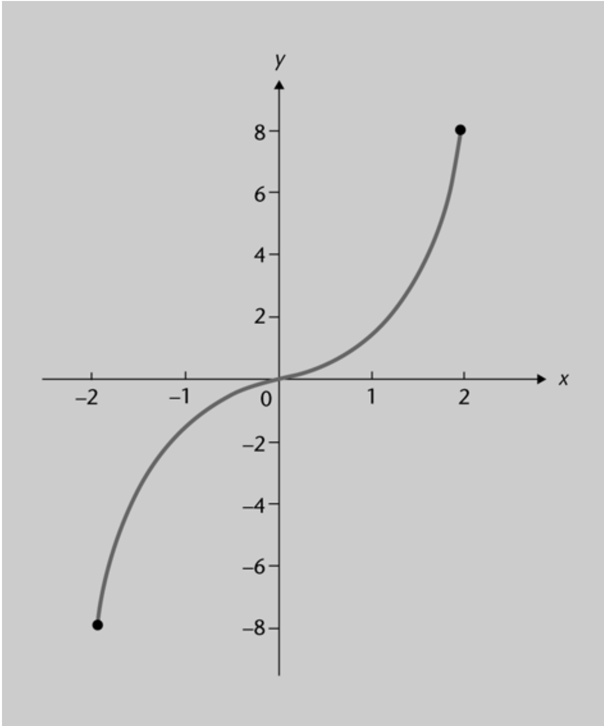
La función tiene un mínimo absoluto y relativo de valor 0 en el punto $x = 0$.



Por lo tanto, una función puede tener mínimos y no tener máximos, y viceversa.

A10

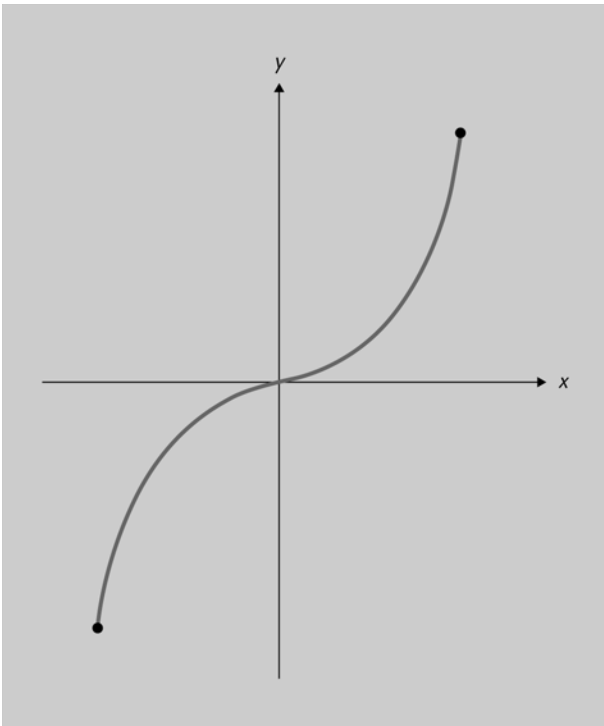
La figura muestra la gráfica de la función, que tiene un valor absoluto de 8 en el punto $x = 2$ y un mínimo absoluto de –8 en $x = –2$. La función no tiene extremos relativos.



Así, una función puede no tener ningún extremo relativo.

A11

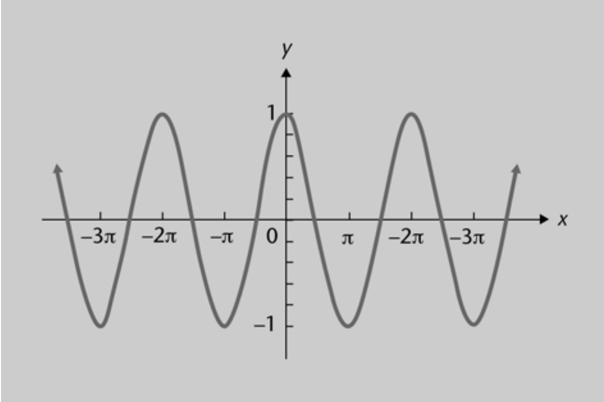
Como no hemos restringido el dominio de la función, su representación es la de la siguiente figura.



Por lo tanto, una función puede no tener puntos extremos, ni absolutos ni relativos.

A12

Como no se ha restringido el dominio de esta función, la gráfica es la de la función coseno, que ya conocemos.



La función coseno tiene extremos (relativos y absolutos) en muchos puntos. Los máximos relativos y absolutos son de valor 1 y se dan en los siguientes puntos,

$$x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi...$$

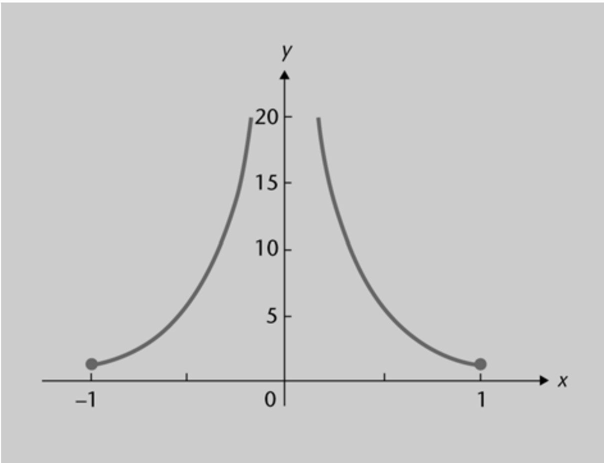
Los mínimos absolutos y relativos, de valor –1, se dan en,

$$x = \pm \pi, \pm 3\pi...$$

Como vemos, una función puede tener extremos relativos en infinitos puntos.

A13

La gráfica de la función es la siguiente:



Como la función no es continua en $x = 0$ porque tiende a infinito para $x \to 0$, no es aplicable el *teorema del valor extremo y puede suceder cualquier cosa*.

La función no tiene un máximo absoluto; pero sí tiene un mínimo absoluto, tanto en $x = -1$ como en $x = 1$.

A14

La derivada de la función es,

$$f'(x) = 3x^2$$

Claramente, $x = 0$ es un punto crítico (derivada igual a cero). Además, hemos visto en A10 que esta función no tiene extremos relativos, por lo tanto, los puntos críticos no han de ser necesariamente extremos relativos.

A15

Al tratarse de un polinomio, la función es continua en todos los puntos y, por tanto, también en el intervalo de definición, $t \in [-4, 2]$.

Los puntos críticos los obtenemos de la derivada,

$$g'(t) = 6t^2 + 6t - 12 = 6(t+2)(t-1)$$

Tenemos dos puntos críticos, $t = -2$, $t = 1$, y los dos se sitúan en el intervalo de definición.

Evaluemos la función en los dos puntos críticos y en los extremos,

$$g(-4) = -28 \qquad g(-2) = 24 \qquad g(1) = -3 \qquad g(2) = 8$$

Los extremos absolutos son los valores máximo y mínimo que toma la función, y estos cuatro puntos representan los únicos lugares del intervalo donde pueden aparecer los extremos absolutos.

Vemos que el máximo absoluto está en,

$$g(-2) = 24 \text{ (punto crítico)}$$

y el mínimo absoluto, en,

$$g(-4) = -28 \text{ (un punto extremo del intervalo)}$$

A16

Ya sabemos que los puntos críticos son $t = -2$, $t = 1$, pero sólo el punto $t = 1$ cae dentro del intervalo. Los valores de la función son,

$$g(0) = 4 \qquad g(1) = -3 \qquad g(2) = 8$$

Vemos que el máximo absoluto es $g(2) = 8$ y el mínimo absoluto $g(1) = -3$.

A17

Queremos obtener los extremos absolutos de $P(t)$ en el intervalo $[0, 4]$. La función es continua para todos los valores de t. Derivémosla,

$$P'(t) = 3 + 4\cos(4t)$$

Los puntos críticos proceden de igualar a cero la derivada; como la función es continua para todo t, no dará otros puntos críticos. De $P'(t) = 0$ obtenemos,

$$\cos(4t) = -3/4$$

que tiene las siguientes soluciones,

$$\begin{matrix} 4t = 2.4189 + 2\pi n \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots \\ 4t = -2.4189 + 2\pi + 2\pi n = 3.8643 + 2\pi n \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} t = 0.6047 + \dfrac{n\pi}{2} \\ t = 0.9661 + \dfrac{n\pi}{2} \end{cases}$$

Hemos de ver qué puntos críticos están dentro del intervalo $[0, 4]$,

$$n = 0,\ t = 0.6047,\ t = 0.9661$$

Aparecen,

$$n = 1,\ t = 0.6047 + \pi/2 = 2.1755,\ t = 0.9661 + \pi/2 = 2.5369$$

También están,

$$n = 2,\ t = 0.6047 + \pi = 3.7463,\ t = 0.9661 + \pi = 4.1077$$

Y sólo el primer punto se sitúa dentro del intervalo.

Por lo tanto, tenemos cinco puntos críticos en el intervalo,

$$0.6047, \quad 0.9661, \quad 2.1755, \quad 2.5369, \quad 3.7463$$

Para determinar cuáles son las poblaciones mínimas y máximas absolutas, hemos de sustituir los puntos anteriores en la función, así como los puntos extremos del intervalo,

$$P(0) = 100.0,\ P(4) = 111.7121, \quad P(0.6047) = 102.4756, \quad P(0.9661) = 102.2368$$
$$P(2.1755) = 107.1880,\ P(2.5369) = 106.9492, \quad P(3.7463) = 111.9004$$

Luego, la población mínima es 100.0 en el instante inicial, $t = 0$, y la máxima es 111.9, en $t = 3.7463$.

A18

Buscamos los extremos absolutos de la función $A(t)$ en el intervalo $[0, 10]$. La función es continua para todo t, por tanto, no hay problema. Derivamos la función,

$$A'(t) = -10e^{5-\frac{t^2}{8}} - 10te^{5-\frac{t^2}{8}}(-\frac{t}{4}) = 10e^{5-\frac{t^2}{8}}(-1 + \frac{t^2}{4})$$

Como el exponencial no se anula nunca, la derivada se anulará cuando,

$$-1 + \frac{t^2}{4} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \pm 2$$

Sólo el punto crítico $t = 2$ se sitúa dentro del intervalo. Evaluemos la función en este punto y en los extremos del intervalo,

$$A(0) = 2\,000, \quad A(2) = 199.66, \quad A(10) = 1\,999.94$$

Por lo tanto, el valor máxime es 2 000 en el instante inicial y el mínimo es 199.66 en $t = 2$.

Los puntos críticos anteriores son consecuencia de la anulación de la derivada. A veces aparecen puntos críticos porque la derivada no es continua. Veámoslo.

A19

La función es continua en el intervalo dado. Derivémosla,

$$Q'(y) = 3(y+4)^{2/3} + 3y\frac{2}{3}(y+4)^{-1/3} = \frac{5y+12}{(y+4)^{1/3}}$$

Tenemos dos puntos críticos y están dentro del intervalo que consideramos.

$y = -4$, porque no hay derivada en este punto.
$y = -12/5$, porque se anula la derivada.

Evaluemos la función. También en los extremos del intervalo,

$$Q(-4) = 0, \quad Q(-5) = -15, \quad Q(-12/5) = -9.849, \quad Q(-1) = -6.241$$

La función tiene un máximo absoluto en $x = -4$ y un mínimo absoluto en $y = -5$.

A20

Necesitamos calcular la derivada,

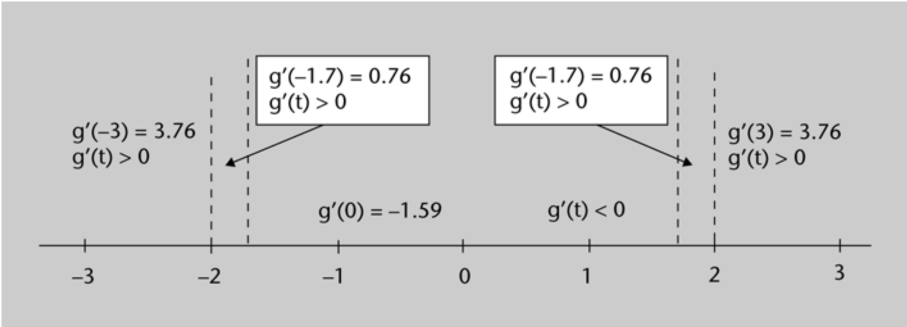
$$g'(t) = \left(t^2-4\right)^{1/3} + \frac{2}{3}t^2\left(t^2-4\right)^{-2/3} = \frac{5t^2-12}{3\left(t^2-4\right)^{2/3}}$$

Por lo tanto, tenemos cuatro puntos críticos,

$t = \pm 2$, donde la derivada no existe;

$t = \pm\sqrt{\frac{12}{5}} = \pm 1.549$, donde se anula la derivada.

Marquemos sobre el eje de números reales los puntos críticos y el signo de la derivada a izquierda y derecha.



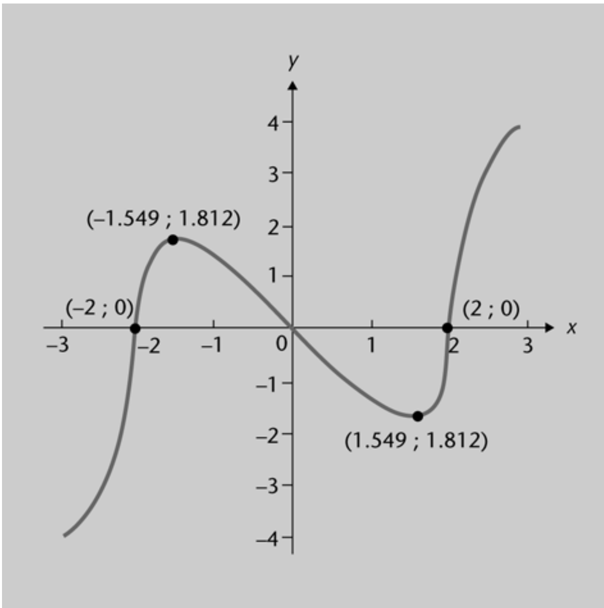
Luego, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento son los siguientes:

Crecimiento: $-\infty < x < -\sqrt{\dfrac{12}{5}}$ y también $\sqrt{\dfrac{12}{5}} < x < +\infty$

Decrecimiento: $-\sqrt{\dfrac{12}{5}} < x < \sqrt{\dfrac{12}{5}}$

Así que ni $t = -2$ ni $t = 2$ son mínimos ni máximos relativos porque la función es creciente en los dos lados de estos puntos. Por otro lado, por el cambio de crecimiento, $t = -\sqrt{(12/5)}$ es un máximo relativo, y $t = \sqrt{(12/5)}$ es un mínimo relativo.

La gráfica de la función es la siguiente:



A21

Las derivadas son,

$$y' = -2x$$
$$y'' = -2 < 0$$

Por tanto, la función es convexa y tiene un máximo en $x = 0$.

A22

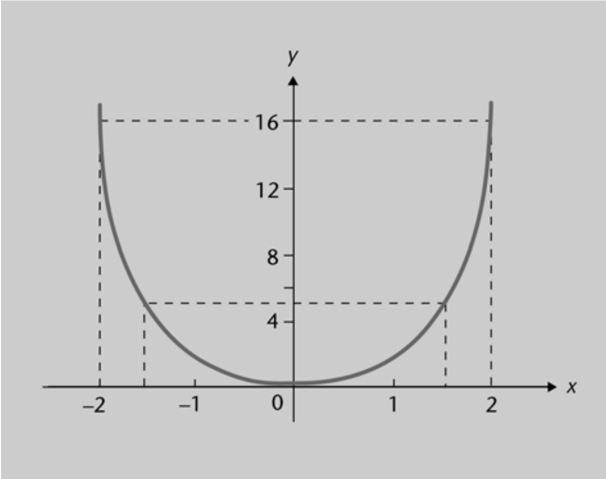
En los tres casos, la función tiene una segunda derivada nula, $f''(0) = 0$; así que tenemos:

a) un mínimo relativo en $x = 0$,

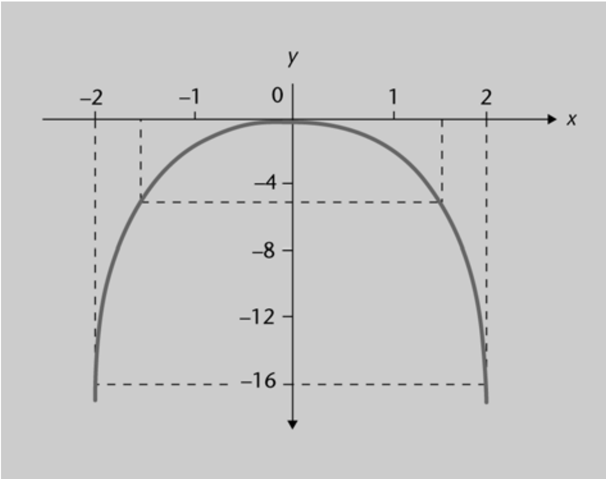
b) un máximo relativo en $x = 0$,
c) ni máximo ni mínimo: un punto de inflexión en $x = 0$.

Las gráficas de las tres funciones son las siguientes:

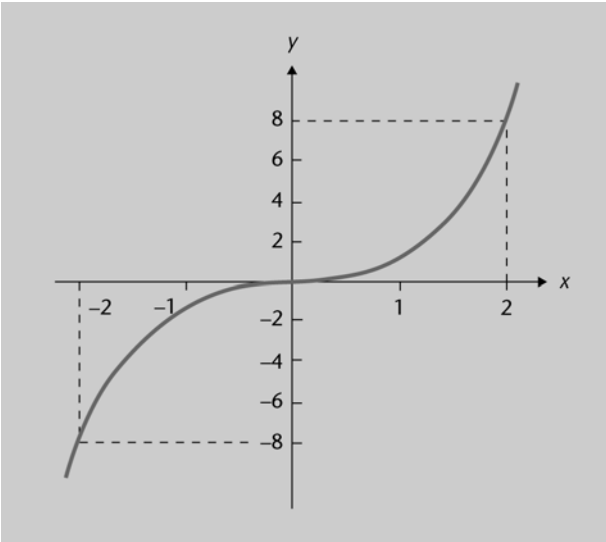
a)



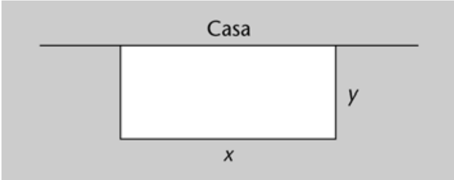
b)



c)



A23



La función que deseamos optimizar es el área, y la restricción es la cantidad de cierre. Las dos ecuaciones son, pues,

Maximizar: $A = xy$
Restricción: $200 = x + 2y$

Una forma de resolver el problema es eliminar la variable x, por ejemplo (o la variable y),

$$x = 200 - 2y$$

y así tenemos una función de una sola variable que hemos de maximizar,

$$A(y) = (200 - 2y) \cdot y = 200y - 2y^2$$

El valor de y está restringido al intervalo 0, 100; sin embargo, no puede tener estos dos valores porque,

$y = 0$ (un cierre rectangular sin un lado)
$y = 100$ m (el cierre sería un hilo, sin anchura)

Derivamos la función y la pasamos a cero:

$$A'(y) = 200 - 4y$$

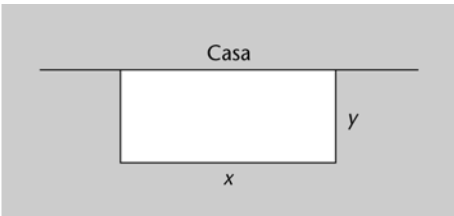
y resulta un único punto crítico,

$$y = 50 \text{ m}$$

que da un valor $x = 200 - 2y = 100$ m, y un área $A = xy = 5\,000$ m^2.

A24

El planteamiento es parecido al del caso anterior, pero ahora el cierre pasa por delante de la casa:



La función que queremos optimizar es el área, y la restricción es la cantidad de cierre. Las dos ecuaciones son, pues,

Maximizar: $A = xy$
Restricción: $200 = 2x + 2y$

Una forma de resolver el problema es eliminar la variable x, por ejemplo (o la variable y),

$$x = 100 - y$$

y así tenemos una función de una sola variable que hemos de maximizar,

$$A(y) = (100 - y) \cdot y = 100y - y^2$$

El valor de y está restringido al intervalo 0,100, pero no puede tener estos dos valores porque,

$y = 0$ (un cierre rectangular sin un lado)
$y = 100$ m (el cierre sería un hilo, sin anchura)

Derivamos la función y la pasamos a cero,

$$A'(y) = 100 - 2y$$

y resulta un único punto crítico,

$$y = 50 \text{ m}$$

que da un valor $x = 100 - y = 50$ m, y un área $A = xy = 2\,500$ m^2.

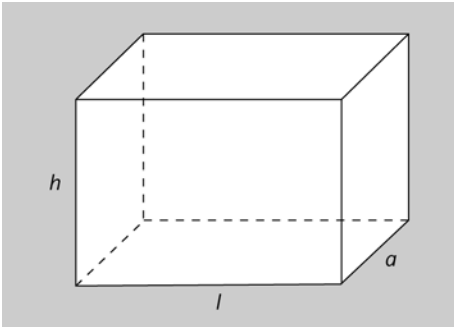
Como vemos, la solución es ahora un cuadrado, no un rectángulo.

Nota

Este problema es similar al que permite calcular la figura geométrica que tiene una superficie mínima para un volumen dado: la esfera.

A25

El coste de hacer cada cara es el producto del área para el precio correspondiente.



Queremos minimizar la siguiente función,

$$C = 100(2la) + 50(2ah + 2lh)$$

con la restricción,

$$2\text{m}^3 = lah = 3a^2h$$

Tenemos una función C de dos variables y una ecuación de restricción. Por tanto, podemos eliminar la variable h,

$$h = \frac{2}{3a^2}$$

y obtenemos, con la expresión anterior y la condición $l = 3a$,

$$C = 600a^2 + 50(2ah + 6ah) = 600a^2 + 400ah = 600a^2 + \frac{800}{3a}$$

La derivamos y la pasamos a cero,

$$C'(a) = 1\,200a - \frac{800}{3a^2} = 0 \Rightarrow 3600a^3 - 800 = 0 \Rightarrow 400(9a^3 - 2) = 0$$

y resulta,

$$a = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$$

Este punto es el valor requerido. Sin embargo, nos hemos de asegurar de que el coste de la caja correspondiente será mínimo y no máximo.

Como la segunda derivada es positiva para cualquier $a > 0$ (es cóncava),

$$C''(a) = 1\,200 + \frac{1600}{3a^3} > 0$$

la función tendrá un mínimo en el punto calculado. El coste mínimo en euros será,

$$C\left(a=\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)=600\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^2+\frac{800}{3\sqrt[3]{\frac{2}{9}}}=660.38$$

y las dimensiones han de ser: $a=\sqrt[3]{\frac{2}{9}}=0.606$, $l=3\sqrt[3]{\frac{2}{9}}=1.817$, $h=2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=1.817$

A26

Queremos minimizar la siguiente función,

$$C=100(2la)+50(2ah+2lh)$$

con la restricción,

$$2\text{m}^3=lah=3a^2h$$

Tenemos una función C de dos variables y una ecuación de restricción. Por tanto, podemos eliminar la variable a,

$$a=\sqrt{\frac{2}{3h}}$$

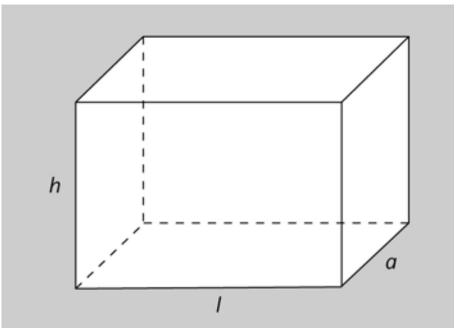
y obtenemos, con la expresión anterior y la condición $l = 3a$,

$$C=\frac{400}{h}+400h\sqrt{\frac{2}{3h}}=\frac{400}{h}+400\sqrt{\frac{2h}{3}}$$

La derivamos y la pasamos a cero,

$$C'(h)=-\frac{400}{h^2}+\frac{1}{2}400\sqrt{\frac{2}{3h}}=0$$
$$h=\sqrt[3]{6}$$

A27



Deseamos maximizar el volumen,

$$V=lah$$

Con la restricción de,

$$10=2la+2ah+2lh$$

y la condición,

$$l=a$$

Podemos eliminar la variable l de las dos ecuaciones,

$$V=a^2h$$
$$10=2a^2+4ah$$

y si ahora eliminamos h, obtenemos una fórmula en la que sólo tenemos la variable a,

$$h = \frac{10 - 2a^2}{4a}$$
$$V(a) = a^2\left(\frac{5 - a^2}{2a}\right) = \frac{1}{2}\left(5a - a^3\right)$$

Derivamos,

$$V'(a) = \frac{1}{2}\left(5 - 3a^2\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

El valor negativo de a no tiene sentido como longitud de una caja. Para ver si $a = +\sqrt{\frac{5}{3}}$ corresponde a un máximo o a un mínimo del volumen, calculamos la segunda derivada de V en este punto,

$$V'(a) = -3a < 0$$

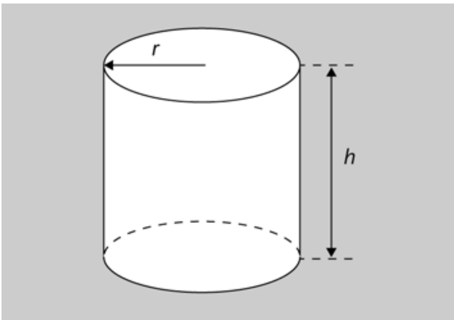
Se trata de una función convexa de a, y el volumen correspondiente es un máximo. Las dimensiones optimizadas de la caja son, pues,

$$h = l = \ a = +\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Se trata de una caja cúbica.

A28

Podríamos representar el envase de esta manera:



Queremos minimizar la superficie total del envase, incluyendo las tapas. El volumen del cilindro es igual al área de la base por la altura,

$$V = \pi r^2 h$$

y el área lateral, sumada al área de las bases, es,

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

La restricción es,

$$V = 1.5L$$

y podemos utilizarla para eliminar la variable h,

$$h = \frac{1.5}{\pi r^2}$$

Resulta,

$$A(r) = 2\pi r\left(\frac{1.5}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2 = 2\pi r^2 + \frac{3}{r}$$

La primera derivada,

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{3}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 3}{r^2}$$

se anula en el punto tal que,

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$$

Podemos calcular la segunda derivada y ver que el volumen corresponde a un mínimo. Pero, en su lugar, emplearemos otro método: calcularemos la primera derivada en puntos a los dos lados y cercanos a $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$.

Por ejemplo, si $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} - 0.1$, resulta $A'(r) < 0$, y si , $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} + 0.1$ resulta que $A'(r) > 0$. Luego, la función pasa de decreciente a creciente, conforme crece *r* alrededor del punto que anula la primera derivada. Esto quiere decir que la función tiene un mínimo en este punto.

El resultado es, pues,

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$$

$$h = \frac{1.5}{\pi\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}}$$

A29

El volumen es constante,

$$V = \pi r^2 h$$

de donde aislamos h:

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

y el área lateral, sumada al área de las bases, es,

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

donde, substituyendo h,

$$A(r) = \frac{2\pi rV}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

$$A'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}}$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{2V}\right)^2}$$

Y ahora, manipulando algebraicamente el resultado para h, tenemos que comprobar que es el doble que r:

$$h = \frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{2V}\right)^2 \frac{4\pi}{2V}\frac{2V}{4\pi}} = \frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{2V}\right)^3}\sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} = \frac{V}{\pi}\frac{4\pi}{2V}\sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} = 2r$$

A30

El volumen de la caja que queremos maximizar es,

$$V(h) = h(14 - 2h)(10 - 2h)$$

Ahora no tenemos una ecuación para la restricción porque la condición del área del centro del cartón ya la hemos empleado en el dibujo.

Derivamos e igualamos a cero,

$$V(h) = 140h - 48h^2 + 4h^3$$
$$V'(h) = 140 - 96h + 12h^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 35 - 24h + 3h^2 = 0$$

y resulta,

$$h = \frac{24 \pm \sqrt{156}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{39}}{3} = \begin{cases} 1.9183 \\ 6.0817 \end{cases}$$

Tenemos que ver cuáles de los dos dan el volumen máximo. Podemos observar en el dibujo de la caja que el máximo valor de h es h = 5 cm. Por tanto, la solución h = 6.0817 cm no tiene sentido.

Por lo tanto, como,

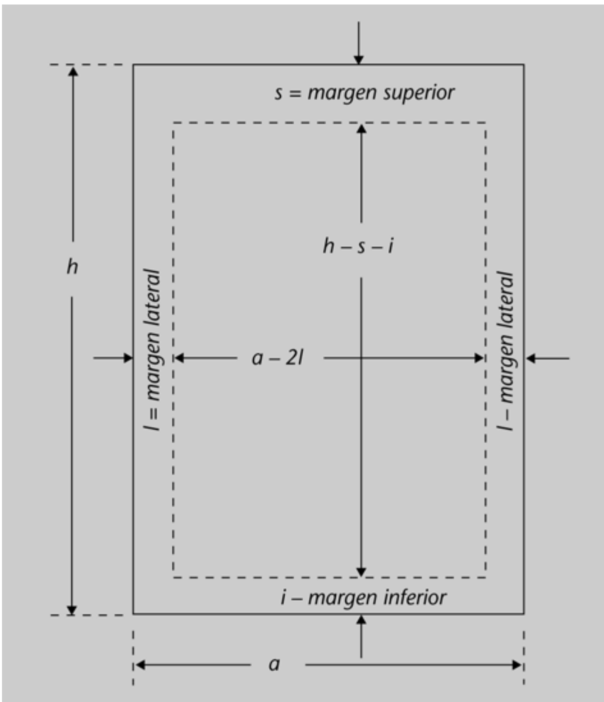
$$V''(h) = -96 + 24h$$
$$V''(h = 1.9183) < 0$$

se trata de un volumen máximo,

$$V(h = 1.9183 \text{ cm}^3) = 120.1644 \text{ cm}^3$$

A31

La restricción es el área total del póster y queremos optimizar el área impresa (es decir, el área del póster que surge al excluir los márgenes. El esquema del póster es el siguiente:



En forma de ecuaciones, hemos de maximizar el área,

$$A = (a-4)(h-5.5)$$

con la restricción,

$$400 = ah$$

Eliminamos h,

$$A(a) = (a-4)\left(\frac{400}{a} - 5.5\right) = 422 - 5.5a - \frac{1\,600}{a}$$
$$A'(a) = -5.5 + \frac{1\,600}{a^2} = 0$$
$$a = \sqrt{\frac{3\,200}{11}}$$

La segunda derivada es siempre negativa,

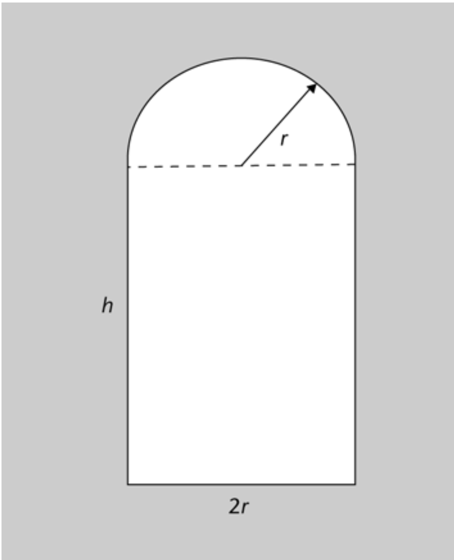
$$A''(a) = -2\frac{1\,600}{a^3} < 0$$

por lo tanto, se trata de un máximo. Resulta,

$$h = 400\sqrt{\frac{11}{3\,200}} = 10\sqrt{\frac{11}{2}}$$
$$A = \left(\sqrt{\frac{3\,200}{11}} - 4\right)\left(10\sqrt{\frac{11}{2}} - 5.5\right)$$

A32

Queremos una ventana que tenga la forma de la siguiente figura y que tenga el área máxima para un perímetro dado de 12 m.



Si el radio del círculo es r, la base de la ventana sería $2r$. El perímetro es la longitud de los tres lados de la parte rectangular, más la mitad de un círculo de radio r. El área que queremos maximizar es la del rectángulo, sumada a la mitad del círculo de radio r.

Deseamos maximizar la función,

$$A = (2r)h + \tfrac{1}{2}\pi r^2$$

con la restricción,

$$12 = 2h + 2r + \pi r$$

Eliminamos h,

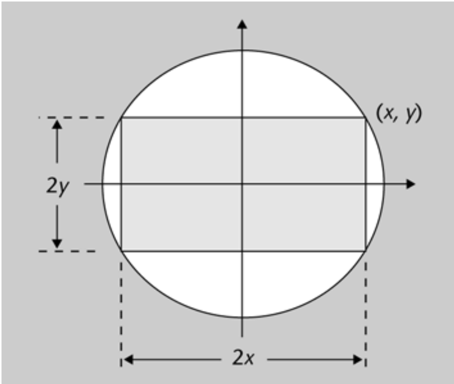
$$A(r) = 2r(6 - r - \tfrac{1}{2}\pi r) + \tfrac{1}{2}\pi r^2 = 12r - r^2(2 + \frac{\pi}{2})$$
$$A'(r) = 12 - r(4 + \pi)$$
$$A''(r) = -(4 + \pi) < 0$$

Al igualar a cero la primera derivada, obtenemos,

$$r = \frac{12}{4 + \pi} = 1.6803$$

Como la segunda derivada es negativa, se trata de un área máxima de la ventana para este radio.

A33



Mirad el esquema de lo que nos piden. Queremos el área del rectángulo más grande que podamos inscribir, de manera que las cuatro esquinas toquen el círculo. Si el círculo está centrado en el origen, la ecuación del círculo es,

$$x^2 + y^2 = 16$$

Y las coordenadas del extremo superior derecho del rectángulo son (x, y). El área del rectángulo, si aislamos y de la restricción anterior, será,

$$A = (2x)(2y) = 4xy = 4x\sqrt{16 - x^2}$$

Derivamos,

$$A'(x) = 4\sqrt{16 - x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{4\left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2 - 4x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{64 - 8x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Por supuesto que podemos limitar x al intervalo,

$$0 \leq x < 4$$

porque estamos suponiendo que x está dentro del primer cuadrante y no llega al radio del círculo. Así no tenemos problemas con el radicando del denominador de la primera derivada.

Si igualamos a cero la derivada, resulta,

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

El único punto válido es el positivo, y resulta,

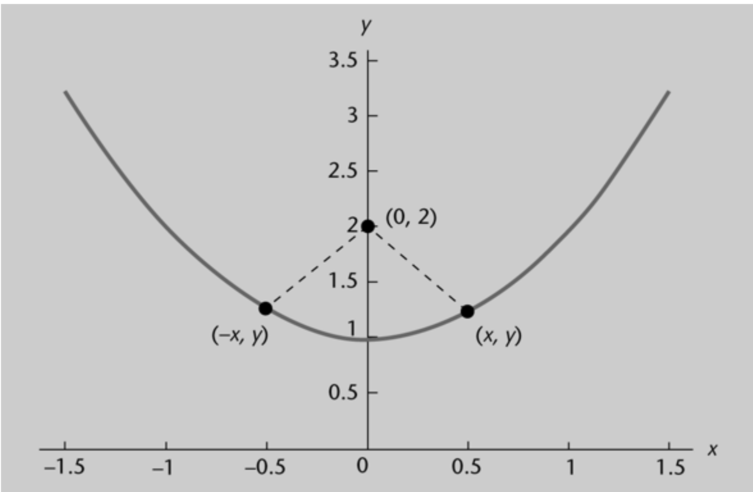
$$x = y = 2\sqrt{2}$$
$$A = 32$$

Se trata de un cuadrado.

Para comprobar que se trata de un máximo, tendremos que calcular la segunda derivada. Os lo proponemos como ejercicio.

A34

Hacemos un esquema de la situación:



Estamos interesados en la mínima longitud de la línea de trazos. Y si esta distancia no es la que hay desde el punto $x = 0$, habrá dos puntos de la gráfica que serán la solución, porque la gráfica es simétrica respecta al eje Y, y el punto desde el que medimos distancies está en el eje Y.

La distancia entre el punto (0, 2) y un punto (x, y) es,

$$\mathrm{d} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

Si nos damos cuenta de que, si la distancia anterior es mínima, también lo será el valor de d^2, ello nos facilita trabajar con el cuadrado de la distancia. Por tanto, queremos minimizar la función,

$$D = \mathrm{d}^2 = x^2 + (y-2)^2$$

La restricción es que el punto (x, y) se sitúe sobre la parábola,

$$y = x^2 + 1$$

Entonces, podemos eliminar la variable y, para pasar a derivar la función de x,

$$\begin{aligned} D(x) &= x^2 + (x^2+1-2)^2 = x^4 - x^2 + 1 \\ D'(x) &= 4x^3 - 2x = 2x\left(2x^2 - 1\right) \\ D''(x) &= 12x^2 - 2 \end{aligned}$$

Tenemos tres puntos críticos,

$$x = 0$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

En principio, no podemos excluir los valores negativos ni el cero. Una vez sustituidos en la segunda derivada, obtenemos,

$$D''(0) = -2 < 0 \qquad D''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \qquad D''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4$$

Luego, en $x = 0$ hay un máximo relativo, y no será la distancia mínima que buscamos. Tenemos dos puntos críticos que dan la distancia mínima. Si $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$, podemos ver que $D'(x) < 0$, y, por tanto, la función es decreciente hasta que llega al punto $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Es decir, la función siempre será mayor que en el punto $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, donde es mínima. Análogamente, podemos observar que si $x > -\frac{1}{\sqrt{2}}$, resulta $D'(x) > 0$, y la función es creciente a la derecha del punto $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. En definitiva, tenemos un mínimo absoluto en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Sustituimos, y obtenemos los puntos (x, y) más cercanos al punto (0, 2),

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{2}$$

A35

De $y = x^2 + 1$ obtenemos que $x^2 = y - 1$. La función que queremos minimizar ahora es,

$$\begin{aligned} D(y) &= x^2 + (y-2)^2 = y - 1 + (y-2)^2 = y^2 - 3y + 3 \\ D'(y) &= 2y - 3 \\ D''(y) &= 2 > 0 \end{aligned}$$

Tenemos un sólo punto crítico, $y = 3/2$, y como la segunda derivada es siempre positiva, sabemos que la función es cóncava y tenemos un mínimo absoluto.

Ahora encontramos los valores de x,

$$x^2 = y - 1 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hemos hallado la misma solución que en la actividad anterior, pero con mucho menos esfuerzo.